

Fermiho úlohy
4. ročník (2009/2010)
1. kolo

Úloha 3

Zadání: Kolik energie může být uchováno v typickém školním van de Graaffově generátoru?

Řešení:

Typický školní van de Graaffův generátor je tvořen koulí o průměru $d_1 = 30 \text{ cm}$, která je vytvořena povětšinou z hliníku. Zanedbám otvor, kterým vstupuje dovnitř pás. Tato koule ovšem není plná, nýbrž dutá. Řekněme, že hmotnost koule nesmí být větší jak $m_1 = 2 \text{ kg}$ (aby se s ní ve škole dobře manipulovalo). Hustota hliníku za normálních podmínek je $\rho = 2700 \text{ kg m}^{-3}$.

Hmotnost duté koule je tedy:

$$m_1 = \frac{1}{6} \pi (d_1^3 - d_2^3) \rho,$$

kde d_2 je průměr vnitřní dutiny kolového tvaru (její střed splývá se středem koule).

Proto průměr vnitřní koule je:

$$d_2 = \left(d_1^3 - \frac{6m_1}{\pi \rho} \right)^{(1/3)}.$$

Pro konkrétní hodnoty:

$$d_2 = 0,295 \text{ m}.$$

Tím jsem ověřil, že předpoklad dvoukilogramové koule je reálný.

Tloušťka kovového povrchu je tedy 0,25 cm.

Jeden atom hliníku má 13 elektronů, z toho 3 valenční elektrony. Valenční elektrony jsou v kovové vazbě sdíleny, a proto je bude relativně snadné odvést z koule pryč. Ostatní elektrony jsou z principu také odveditelné, ne ale tak snadno.

Předpokládám, že koule bude plně nabitá, pokud přijde o všechny elektrony/všechny valenční elektrony (rozeberu obě možnosti).

Počet atomů v kouli:

$$N = \frac{m_1}{m_0},$$

kde N_A je Avogadrova konstanta a m_0 hmotnost jednoho atomu hliníku.

$$m_0 = 13 u = 2,1587 \times 10^{-26} \text{ kg}$$

Celkový počet valenčních elektronů je:

$$N_{ve} = 3 \frac{m_1}{m_0} .$$

Celkový počet elektronů je:

$$N_e = 13 \frac{m_1}{m_0} .$$

Vztah mezi velikostí elektrické síly a elektrickým nábojem vyjadřuje Coulombův zákon:

$$F = \frac{1}{4 \pi \epsilon_0 \epsilon_r} \frac{|Q_1||Q_2|}{r^2} .$$

Integrál síly po dráze odpovídá potenciální energii:

$$E_p = -\frac{1}{4 \pi \epsilon_0 \epsilon_r} \frac{|Q_1||Q_2|}{r} .$$

Energie nutná k přenesení elektronu do nekonečné vzdálenosti od atomu pak bude:

$$E = \frac{1}{4 \pi \epsilon_0 \epsilon_r} \frac{|Q_1||Q_2|}{r} .$$

Budu předpokládat, že kladný náboj protonů v jádře a záporný náboj elektronů v obalu se vzájemně „požerou“ a atom s odebraným elektronem bude působit jako bodový objekt s nábojem q . Pro další odebraný elektron $2q$ atd.

Proto energie nutná k odebrání n elektronů je:

$$E_n = \frac{1}{4 \pi \epsilon_0 \epsilon_r} \frac{q^2}{r} \sum_{i=1}^n (i) = \frac{1}{4 \pi \epsilon_0 \epsilon_r} \frac{q^2}{r} \frac{(n+1)n}{2} ,$$

kde r je poloměr průměrného orbitalu, na kterém se elektrony nacházejí. Pro naše účely bude dostačující, že odhadem položíme $r = 10^{-10} \text{ m}$.

Pro odebrání valenčních elektronů je celková práce uložitelná do generátoru:

$$W_{ev} = \frac{3}{2} \frac{1}{\pi \epsilon_0 \epsilon_r} \frac{q^2}{r} 3 \frac{m_1}{m_0} = \frac{9}{2} \frac{1}{\pi \epsilon_0 \epsilon_r} \frac{q^2}{r} \frac{m_1}{m_0} .$$

V tomto případě není předpoklad jednotné vzdálenosti elektronů od středu vůbec od věci.

Pro úplnost uvádím i použití tohoto zjednodušení na plný počet elektronů:

$$W_e = \frac{91}{4} \frac{1}{\pi \epsilon_0 \epsilon_r} \frac{q^2}{r} 13 \frac{m_1}{m_0} = \frac{1183}{4} \frac{1}{\pi \epsilon_0 \epsilon_r} \frac{q^2}{r} \frac{m_1}{m_0} .$$

Tento výraz bude odpovídat skutečnosti už mnohem méně.

Pro konkrétní hodnoty tedy dostáváme:

$$W_{ev} = 3,8 \text{ GJ} = 1100 \text{ kWh} \quad .$$

To je velice vysoká hodnota v porovnání například s autobaterií (~2 kWh). To odpovídá energii, která se uvolní spálením více jak 100 kg uhlí. I přesto se mi nazdá nereálná, vzhledem k podmínkám, které jsem značně idealizoval.

$$W_e = 253 \text{ GJ} = 70200 \text{ kWh}$$

Tato hodnota už se mi nereálná zdá. Idealizace které jsem použil podle mého názoru nejdou aplikovat na všechny atomové orbitály u hliníku.

Závěr:

Práce vložitelná do generátoru se pohybuje, pro zařízení s „hlavní koulí“ o průměru 30 cm, hmotnosti 2 kg, vyrobené z hliníku, okolo 1000 kWh.