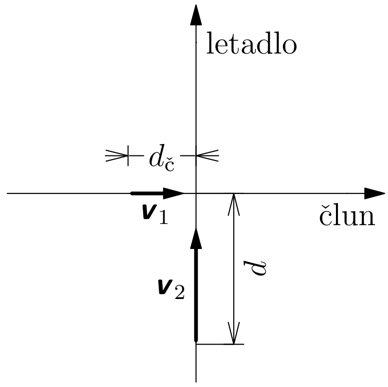
FyS 2006/2007: řešení 1. série
Tematické zaměření: vrhy

⌘ Úloha 1 Člun s turisty je hnán větrem po hladině moře rychlostí $18\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}}$. Letadlo pobřežní hlídky letí přímo ke člunu ve výšce $h = 500\,\mathrm{m}$ nad hladinou moře rychlostí $v_2 = 180\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}}$. V jaké vodorovné vzdálenosti d musí z letadla vypustit balík s plovacími vestami, aby dopadl co nejblíže ke člunu? Řešte pro případ, kdy

a) letadlo letí za člunem;
b) letadlo startuje z protějšího ostrova a letí člunu naproti;
c) letadlo letí kolmo na směr pohybu člunu, v tomto případě určete i vzdálenost člunu od místa dopadu balíku na hladinu v okamžiku, kdy balík vypadl z letadla. ☞ **5 bodů**



Obr. 1: K řešení úlohy 1

Řešení:
Ve všech případech se balík pohybuje vodorovným vrhem s počáteční rychlostí v_2 z výšky h. Doba pohybu proto vychází

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}} \approx 10\,\mathrm{s}.$$

a) Jsou-li vektory rychlosti letadla a člunu souhlasně rovnoběžné, pohybuje se letadlo vzhledem ke člunu rychlostí $v_2 - v_1$ a balík musí posádka vypustit ve vzdálenosti

$$d = (v_2 - v_1)\,t = (v_2 - v_1)\sqrt{\frac{2h}{g}} \approx 454\,\mathrm{m}.$$

b) V tomto případě se letadlo pohybuje vzhledem ke člunu rychlostí $v_2 + v_1$ a pro vzdálenost d tak dostáváme

$$d = (v_2 + v_1)\,t = (v_2 + v_1)\sqrt{\frac{2h}{g}} \approx 555\,\mathrm{m}.$$

c) Balík musí být vypuštěn tak, aby dopadl na trajektorii, po níž se pohybuje člun, tj. ve vzdálenosti

$$d = v_2 t = v_2\sqrt{\frac{2h}{g}} \approx 505\,\mathrm{m}$$

měřeno kolmo na pohyb člunu (obr. 1). V okamžiku dopadu balíku musí být člun ve vzdálenosti

$$d_\text{č} = v_1 t = v_1\sqrt{\frac{2h}{g}} \approx 51\,\mathrm{m}$$

od místa dopadu.

⌘ Úloha 2 Zpráva z tisku: „Fotbalista Marek Heinz v poslední minutě zápasu vsítil gól, když z pětadvaceti metrů z přímého kopu střelou přes zeď hostujících hráčů vymetl šibenici branky.“ Jestliže míč proletěl hráčům těsně nad hlavami (ve výšce 1,90 m nad zemí), určete, jakou rychlostí byl vykopnut. Sami si zjistěte další potřebné údaje – rozměry branky a správnou vzdálenost zdi hráčů při přímém kopu. Odpor vzduchu a rozměry míče neuvažujte. ☞ **5 bodů**

Řešení:
Označme $h = 1{,}9\,\mathrm{m}$ výšku zdi, $h_1 = 2{,}44\,\mathrm{m}$ výšku branky, $l = 9\,\mathrm{m}$ vzdálenost Marka Heinze od zdi hráčů a $l_1 = 25\,\mathrm{m}$ jeho vzdálenost od branky (obr. 2). Míč koná šikmý vrh vzhůru s počáteční rychlostí v_0, kterou máme vypočítat. Při elevačním úhlu α můžeme psát

$$\begin{aligned} l &= v_0 t_1 \cos\alpha, \qquad h = v_0 t_1 \sin\alpha - \frac{1}{2} g t_1^2, \\ l_1 &= v_0 t_2 \cos\alpha, \qquad h_1 = v_0 t_2 \sin\alpha - \frac{1}{2} g t_2^2, \end{aligned}$$

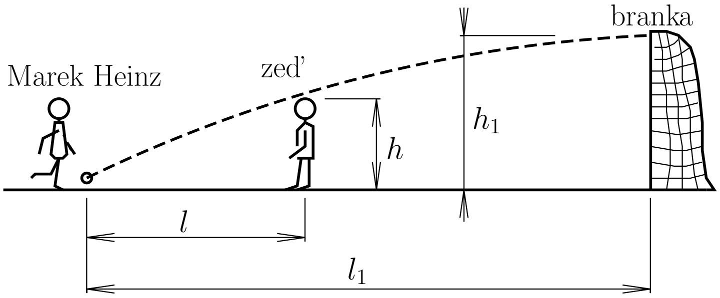
kde t_1 je čas, za který doletí míč ke zdi, a t_2 čas, za který doletí k brance. Z prvních dvou rovnic vyloučením t_1 získáme

$$v_0 = \sqrt{\frac{l^2 g}{2\cos^2\alpha(l\operatorname{tg}\alpha - h)}} \tag{1}$$

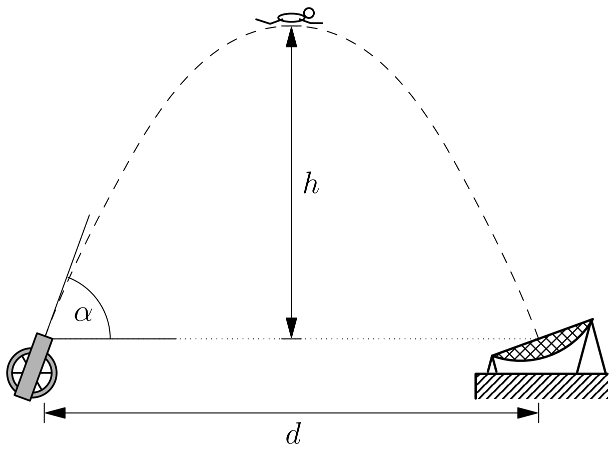
a z druhé dvojice rovnic

$$h_1 = l_1 \operatorname{tg}\alpha - \frac{l_1^2 g}{2v_0^2\cos^2\alpha}. \tag{2}$$

Protože podle rovnice (1) také platí



Obr. 2: K řešení úlohy 2



Obr. 3: K úloze 3

$$2v_0^2\cos^2\alpha = \frac{l^2 g}{l\operatorname{tg}\alpha - h};$$

dosazením do (2) dostáváme

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}\alpha &= \frac{h_1 l^2 - h l_1^2}{l_1 l^2 - l_1^2 l} \approx 0{,}27, \\ \alpha &\approx 15{,}37^\circ. \end{aligned}$$

Z (1) pak po dosazení za $\operatorname{tg}\alpha$ a $\cos\alpha$ vychází hodnota (pro $g = 9{,}8\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$) $v_0 = 27{,}3\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$ neboli $98{,}2\,\mathrm{km{\cdot}s^{-1}}$.

⌘ **Úloha 3** Při cirkusovém vystoupení „živá střela" je artista „vystřelen" z děla pod úhlem $\alpha = 70^\circ$, vylétne do výšky $h = 19\,\mathrm{m}$ a dopadne do sítě, která se po jeho dopadu prohne o $s = 1{,}5\,\mathrm{m}$ (obr. 3). Jakou rychlostí byl artista vymrštěn z děla? V jaké vodorovné vzdálenosti d od děla musí být umístěna síť? Odhadněte, jaké přetížení a po jakou asi dobu pociťoval artista po dopadu do sítě. Odpor vzduchu a rozměry těla zanedbejte. ☞ **5 bodů**

Řešení:
Považujeme-li artistu za hmotný bod, potom je jeho pohyb šikmým vrhem (obr. 3). Označíme-li počáteční rychlost po „výstřelu" z děla v_0. Pro pohyb ve vodorovném směru platí

$$v_x = v_0\cos\alpha, \qquad x = v_0 t\cos\alpha$$

ve svislém

$$v_y = v_0\sin\alpha - gt, \qquad y = v_0 t\sin\alpha - \frac{gt^2}{2}.$$

V nejvyšším bodě platí $v_y = 0$, artista do něho vyletí za dobu

$$t_\mathrm{h} = \frac{v_0\sin\alpha}{g}$$

a z rovnice pro výšku h určíme počáteční rychlost

$$h = v_0 t_\mathrm{h}\sin\alpha - \frac{g t_\mathrm{h}^2}{2} = \frac{v_0^2\sin^2\alpha}{2g},$$

$$v_0 = \frac{\sqrt{2gh}}{\sin\alpha} \approx 20{,}5\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}.$$

Protože výstup do výšky h trvá stejně dlouho jako pád dolů, bude celková doba pohybu artisty $t = 2t_\mathrm{h}$ a pro vzdálenost sítě d tak dostáváme

$$x = d = v_0\,(2t_\mathrm{h})\cos\alpha = \frac{2v_0^2\sin\alpha\cos\alpha}{g} = 4h\operatorname{cotg}\alpha \approx 28\,\mathrm{m}.$$

Po dopadu do sítě (stejnou rychlostí v_0 jakou vyletěl z hlavně) musí artista zastavit na dráze s, koná zpomalený pohyb se zrychlením o velikosti a a platí

$$s = v_0 t' - \frac{1}{2}a{t'}^2, \qquad t' = v_0/a$$

neboli

$$a = \frac{v_0^2}{2s} = 141\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}} \approx 14g.$$

Protože na artistu působí stále i tíhová síla, bude pociťovat přetížení asi $15g$ (zanedbáváme skutečnost, že zrychlení $\boldsymbol{a}$ nemusí mít přesně stejný směr jako $\boldsymbol{g}$. To je samozřejmě velká hodnota, dodejme, že k tomu dochází ve velmi krátké době

$$t' = \frac{v_0}{a} = \frac{2s}{v_0} \approx 0{,}15\,\mathrm{s}.$$

Úloha 4 Nezkušený soustružník vyrobil sérii vadných součástek tak, že hmotnost každé součástky byla o 10 g menší, než by měla být. Před odvezením na přetavení se vadné součástky skladovaly ve zvláštní bedně, vedle níž bylo ještě devět stejných beden se správně vysoustruženými součástkami o správné hmotnosti. Roztržitý skladník však zapomněl, ve které bedně jsou vadné součástky. Samozřejmě by to mohl zjistit postupným vážením beden, ale může se stát, že součástky určené na přetavení by byly až v poslední z nich, takže by bylo nutné zvážit devět beden. Mezitím však přišel vedoucí skladu a řekl, že k určení potřebné bedny je zapotřebí pouze jedno vážení. Poraďte skladníkovi, jak to udělat.

☞ 1. ročník 6 bodů, 2. ročník 5 bodů, 3. a 4. ročník 4 body

Řešení:
Stačí poradit skladníkovi, aby vybral z každé bedny počet součástek rovný pořadí, v jakém je bedna uložena ve skladu, tj. z 1. bedny jednu součástku, ze 2. dvě, … , z 10. deset součástek. Je-li hmotnost správně vyrobené součástky m_1, mělo by takto vybraných 55 součástek vážit $55{\cdot}m_1$. Protože však v jedné bedně jsou součástky vadné, zjistí skladník jinou hmotnost m_2. Z rozdílu $\Delta m = 55{\cdot}m_1 - m_2$ může určit bednu, v níž jsou vadné součástky. Je-li $\Delta m = 10g$, jedná se o bednu 1., pro $\Delta m = 20\,\mathrm{g}$ o bednu 2., pro $\Delta m = 100\,\mathrm{g}$ o bednu 10. a pod..
Samozřejmě lze využít jiné originální nápady, jako ponoření do husího sádla, v němž dopadne nejlehčí bedna na dno nejpozději, ale výše uvedený pomocí vážení se nám zdá jednodušší. Koneckonců v zadání úlohy je výslovně napsáno, že skladník má použít váhy.

Úloha 5 Ježibaba Zubolavá, hrdá majitelka perníkové chaloupky, se rozhodla přestěhovat z hanácké roviny o nadmořské výšce 220 m nad mořem do okolí Sv. Kopečku, na místo o nadmořské výšce 420 m nad mořem, aby měla dobrý výhled do širokého okolí a mohla si tu a tam vykrmit zbloudilé návštěvníky tamější populární zoologické zahrady. Proto se rozhodla odchycené děti Jeníčka a Mařenku odložit na pozdější konzumaci a využít je jako pracovní síly při stavbě svého nového domu. Odhadněte, kolik sklenic Nutelly o hmotnosti 400 g a využitelné energii 8908 kJ spotřebovala ježibaba k výživě Jeníčka a Mařenky při transportu 1200 perníkových tvárnic o rozměrech $30 \times 20 \times 15\,\mathrm{cm}$ na vrchol kopce? Hustota perníku je asi $380\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$.

☞ 1. ročník 6 bodů, 2. ročník 5 bodů, 3. a 4. ročník 4 body

Řešení:
Práce, kterou Jeníček s Mařenkou vykonají, se spotřebuje minimálně na změnu potenciální energie tvárnic. Energii, kterou k vykonání práce budou potřebovat, načerpají z výživné Nutelly. Tato práce W je tedy rovna $W = nE_{\mathrm{využ}}$, kde $E_{\mathrm{využ}}$ je využitelná energie jedné 400-gramové sklenice Nutelly a n je počet sklenic, které Jeníček s Mařenkou zkonzumují. Změna potenciální energie tvárnic je rovna

$$\Delta E_{\mathrm{p}} = mg\Delta h = NMg\Delta h = N\varrho Vg\Delta h, \tag{3}$$

kde Δh je rozdíl nadmořských výšek, N počet tvárnic, M hmotnost jedné tvárnice, ϱ hustota perníku a V objem jedné perníkové tvárnice.
Zákon zachování energie můžeme zapsat ve tvaru

$$nE_{\mathrm{využ}} = N\varrho Vg\Delta h \tag{4}$$

a pro počet sklenic Nutelly, které Jeníček s Mařenkou snědí, vychází

$$n = \frac{N\varrho Vg\Delta h}{E_{\mathrm{využ}}}.$$

Po dosazení hodnot ze zadání získáváme výsledný počet sklenic Nutelly $n = 0{,}904 \approx 1$, což znamená, že Jeníček s Mařenkou jsou velmi levnou pracovní silou a Ježibaba si snadno dopomůže k novému bydlení i bez stavebního spoření.
V předcházejících úvahách jsme samozřejmě nebrali v úvahu, že Mařenka s Jeníčkem nejsou nehmotné bytosti a spotřebují energii i na přemisťování sebe sama. K přesnějšímu řešení by bylo nutné vědět, kolik tvárnic Mařenka s Jeníčkem unesou při jedné cestě. Pokud by Jeníčkova „přepravní kapacita“ byla 4 a Mařenčina 2 tvárnice, museli by cestu nahoru absolvovat 200×. Na změnu jejich potenciální energie by bylo nutné vykonat práci $W_1 = 200\,(M_{\mathrm{j}} + M_{\mathrm{m}})g\Delta h$ a množství spotřebovaných sklenic Nutelly by bylo dáno vztahem

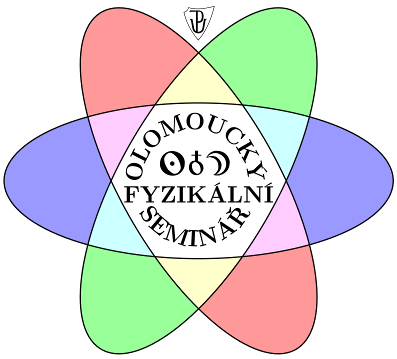
$$n = \frac{W + W_1}{E_{\mathrm{využ}}} = \frac{\left[N\varrho V \ + 200(M_{\mathrm{j}} + M_{\mathrm{m}})\right] g\Delta h}{E_{\mathrm{využ}}}.$$

Při hmotnostech Jeníčka a Mařenky $M_\mathrm{j} = 40\,\mathrm{kg}$ a $M_\mathrm{m} = 30\,\mathrm{kg}$ by Ježibaba musela obětovat necelé 4 a při hmotnostech $M_\mathrm{j} = 100\,\mathrm{kg}$ a $M_\mathrm{m} = 80\,\mathrm{kg}$ dokonce téměř 9 sklenic Nutelly. S vykrmováním obětí by proto ježibaba měla začít určitě až po stěhování.
Ani tento odhad samozřejmě není ještě úplně správný. Nezanedbatelné množství energie je např. potřeba na udržení metabolismu lidského těla; jistě sami přijdete i na další faktory, jejichž vliv jsme nevzali v úvahu.

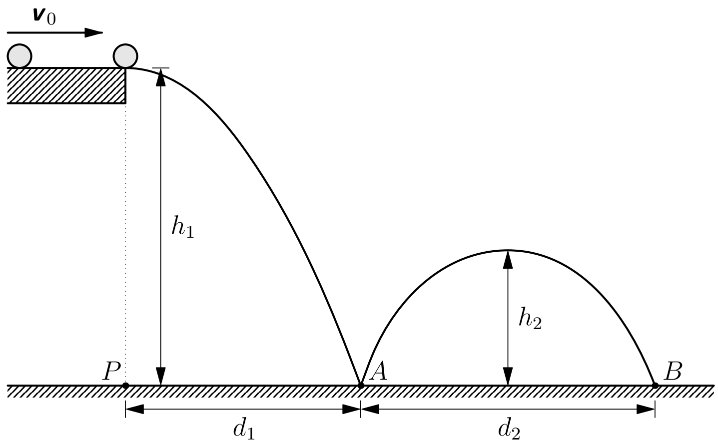
Úloha 6 Vysvětlete význam tří symbolů v centru loga OFyΣu na obr. 4.

☞ **1. ročník 3 body, 2. ročník 2 body, 3. a 4. ročník 1 bod**

Řešení:
Jde o astronomické symboly s významem:
☉ … Slunce,
♁ … Země,
☽ … Měsíc.



Obr. 4: Logo našeho semináře k úloze 6



Obr. 5: K experimentální úloze 7

Úloha 7 (experimentální) S tématem této série souvisí i následující experimentální úloha: určete *součinitel vzpruživosti* pingpongového míčku. Položte míček na vodorovnou podložku (např. stůl) ve výšce h_1 nad podlahou a udělte mu rychlost kolmo na hranu stolu (obr. 5). Míček dopadne na podlahu rychlostí v_1, po odrazu vystoupí do výšky h_2 a znovu dopadne na podlahu rychlostí v_2. Neuvažujeme-li odpor vzduchu, definujeme koeficient vzpruživosti vztahem

$$k = \frac{v_2}{v_1}.$$

a) Odvoďte vztah, jak určit koeficient k změřením výšek h_1 a h_2.
b) Protože výšku h_2 lze při použití běžných měřidel jen odhadnout, navrhněte, jak určit koeficient k ze vzdáleností dopadu $d_1 = |PA|$ a $d_2 = |AB|$. Pomocí získaného vztahu určete koeficient vzpruživosti alespoň pro dva různé druhy povrchu podlahy (např. koberec a keramickou dlažbu) a výsledky porovnejte. ☞ **6 bodů**

Řešení:

a) Nepřihlížíme-li k odporu vzduchu, dopadne míček poprvé na podlahu rychlostí $v_1 = \sqrt{2gh_1}$, podruhé $v_2 = \sqrt{2gh_2}$. Odtud pro koeficient vzpruživosti vychází

$$k = \frac{v_2}{v_1} = \sqrt{\frac{h_2}{h_1}}.$$

b) Pokud necháme míček pohybovat se nejprve po vodorovné podložce, získá rychlost $\boldsymbol{v}_0$. Při dopadu v bodě A pak bude mít rychlost vodorovnou složku $\boldsymbol{v}_0$ a svislou složku $\boldsymbol{v}_1$ o velikosti $v_1 = \sqrt{2gh_1}$. Po odrazu se svislá složka změní na $\boldsymbol{v}_2$ ($v_2 < v_1$). Změříme-li vzdálenosti $d_1 = |PA|$ a $d_2 = |AB|$ podle obr. 5, pak pro čas t_1, za který ve vodorovném směru míček urazí vzdálenost d_1 platí $t_1 = d_1/v_0$ a také

$$v_1 = gt_1 = \frac{gd_1}{v_0}.$$

Z bodu A do bodu B se míček dostane za čas $t_2 = d_2/v_0$, z výšky h_2 na podlahu spadne za čas $t_2/2$, takže analogicky

$$v_2 = g\,\frac{t_2}{2} = \frac{gd_2}{2v_0}.$$

Pro součinitel vzpruživosti k pak konečně vychází

$$k = \frac{v_2}{v_1} = \frac{d_2}{2d_1},$$

takže nezávisí na udělené počáteční rychlosti v_0.
Pro běžnou podlahu (parkety, keramická dlažba) vycházejí hodnoty přibližně $0{,}8 \leqq k \leqq 0{,}9$, pro koberec samozřejmě o něco nižší, přibližně $0{,}4 \leqq k \leqq 0{,}6$.

Úloha 8 (křížovka)

		E			
	E	D	W	I	N
	S	M	O	O	T
		O	H	M	
		N			
P	Á	D			
T	Í	H	A		
	W	A	T	T	
K	E	L	V	I	N
	P	L	Y	N	
T	Ř	E	N	Í	
	T	Y	CH	O	

5 bodů