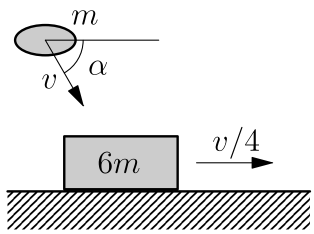
ⒻYΣ 2006/2007: řešení 2. série
Tematické zaměření: zákon zachování hybnosti

⌘ Úloha 1 Kousek plastelíny o hmotnosti $m = 32\,\mathrm{g}$ narazí rychlostí $v = 7\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$ do dřevěného kvádru o hmotnosti $m_1 = 6m$, jenž bez tření klouže rychlostí $v_1 = v/4$ po vodorovném stole. Po nárazu zůstane plastelína přilepená na kvádru a pohybují se společně rychlostí v_2, přičemž všechny rychlosti v, v_1 i v_2 leží v jedné svislé rovině a rychlosti v, v_1 svírají úhel $\alpha = 60°$ (obr. 1). Jakou rychlostí v_2 se pohybovala obě tělesa po nárazu? O kolik se zvětšila vnitřní energie plastelíny, kvádru a okolního vzduchu? ☞ **5 bodů**



Obr. 1: K úloze 1

Řešení:
Na první pohled je zřejmé, že se celková hybnost soustavy nezachovává – před srážkou směřuje výsledná hybnost vpravo dolů, po srážce má směr vodorovný. Z toho vyplývá, že výslednice vnějších sil působících na obě tělesa nemůže být rovna nule

$$\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{g} + 6m\boldsymbol{g} + \boldsymbol{N}(t) \neq \boldsymbol{0},$$

kde ve vztahu směrem zleva doprava vystupují tíhové síly působící na plastelínu i kvádr (směr svisle dolů) a časově proměnná reakce stolu $\boldsymbol{N}(t)$ (směr svisle vzhůru). Protože vodorovné složky těchto sil jsou nulové, bude se *vodorovná* složka hybnosti zachovávat, tj. musí platit

$$mv\cos\alpha + m_1v_1 = mv\cos\alpha + 6m\,\frac{v}{4} = (m + 6m)\,v_2,$$

kde u je hledaná výsledná rychlost, pro kterou získáváme

$$v_2 = \frac{(\cos\alpha + 3/2)\,v}{7} = \frac{2v}{7} = 2\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}. \tag{1}$$

Přírůstek vnitřní energie ΔE určíme pochopitelně ze zákona zachování energie; můžeme psát

$$\frac{mv^2}{2} + \frac{6m\,(v/4)^2}{2} = \frac{(m + 6m)\,v_2^2}{2} + \Delta E$$

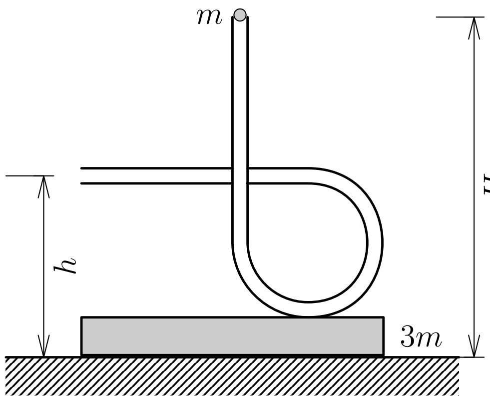
a po dosazení z (1) vychází

$$\Delta E = \frac{45}{112}\,mv^2 \approx 0{,}63\,\mathrm{J}.$$

⌘ Úloha 2 Zakřivená trubice je upevněna ke špalíčku ležícím na hladkém vodorovném stole (obr. 2), nižší konec trubice je ve výšce h nad stolem. Kulička o hmotnosti m může v trubici klouzat bez tření a na počátku se nachází ve výšce H nad stolem; hmotnost špalíčku i s trubicí je $m_1 = 3m$ a na počátku jsou všechna tělesa v klidu. Poté kuličku pustíme. Jakou rychlostí vyletí kulička z nižšího konce trubice, jestliže

a) je špalíček s trubicí pevně upevněn na stole;
b) špalíček s trubicí není upevněn a může bez tření klouzat po stole.

☞ **5 bodů**



Obr. 2: K úloze 2

Řešení:

a) V případě, že je špalíček upevněn, zjistíme rychlost kuličky ze zákona zachování energie (viz obr. 2)

$$mgH = mgh + \frac{mv_1^2}{2},$$

odkud plyne známý vztah (např. pro rychlost volného pádu)

$$v_1 = \sqrt{2g\,(H - h)}. \tag{2}$$

b) Pokud může špalíček klouzat, musíme využít zákon zachování hybnosti. Označme výslednou rychlost kuličky, s níž vyletí z trubice v_2, rychlost špalíčku s trubicí u bude mít opačný směr. Podobně jako v předcházející úloze na soustavu působí 3 vnější síly – tíhové síly působící na kuličku a špalíček s trubicí a časově proměnná reakce stolu orientovaná svisle vzhůru. Výslednice těchto sil má vodorovnou složku opět nulovou, musí se tudíž zachovávat vodorovná složka hybnosti, tj. bude platit

$$0 = mv_2 - 3mu. \tag{3}$$

Ze zákona zachování energie navíc plyne

$$mgH = mgh + \frac{mv_2^2}{2} + \frac{3mu^2}{2}. \tag{4}$$

Vyloučením rychlosti u z (3) a (4) dostaneme

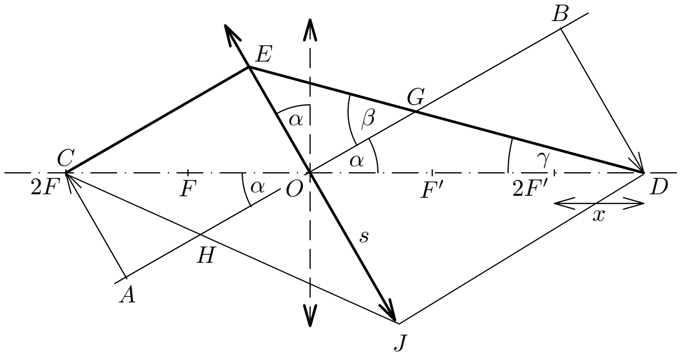
$$v_2 = \sqrt{\frac{3g(H-h)}{2}};$$

v_2 bude menší než v_1, jak lze intuitivně očekávat, neboť kinetická energie se tentokrát musela „rozdělit“ mezi obě tělesa.

Úloha 3 Neználek se pustil z dlouhé chvíle do optických pokusů. Malou svíčku umístil na hlavní optické ose tenké spojné čočky s ohniskovou vzdáleností $f = 70\,\mathrm{cm}$ ve vzdálenosti $2f$ od středu čočky. Na druhé straně umístil stínítko a zkoumal, jak se mění obraz plamene na stínítku, když bude na svíčku foukat. Všeználek chtěl prověřit Neználkovy znalosti optiky a v době, kdy byl Neználek na obědě, pootočil čočku kolem jejího středu tak, že přímka spojující svíčku se středem čočky svírala s hlavní optickou osou úhel $\alpha = 30°$. Navíc čočku opevnil tak, aby ji Neználek nemohl otočit zpátky. Do jaké vzdálenosti od čočky musel chudák Neználek po návratu z oběda umístit stínítko, aby získal opět ostrý obraz? Neználkovu svíčku považujte za bodový zdroj. ☞ **1. ročník 6 bodů, 2. ročník 5 bodů, 3. a 4. ročník 4 body**

Řešení:

Před otočením čočky se ležel obraz svíčky ve vzdálenosti $2f$ od středu čočky. Označíme-li na obr. 3 $|AO| = a$, $|OB| = b$,



Obr. 3: K řešení úlohy 3

$|OD| = y$ a hledané posunutí obrazu x, potom $x = y - 2f$. Z podobností trojúhelníků $\triangle AOC$ a $\triangle BOD$ dále plyne $y = 2fb/a$ a podle obrázku $a = 2f\cos\alpha$. Využijeme-li ještě zobrazovací rovnici

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}, \tag{5}$$

vychází

$$b = \frac{af}{a-f} = \frac{2f\cos\alpha}{2\cos\alpha - 1},$$
$$y = \frac{b}{\cos\alpha} = \frac{2f}{2\cos\alpha - 1},$$
$$x = y - 2f = \frac{4f(1-\cos\alpha)}{2\cos\alpha - 1}.$$

Neználek tedy musí stínítko umístit ve vzdálenosti $y \approx 191{,}2\,\mathrm{cm}$ od středu čočky O, oproti původní poloze musí stínítko posunout o $x \approx 51{,}2\,\mathrm{cm}$ dále od čočky.

Jiné řešení nevyžaduje znalost zobrazovací rovnice (5), ale vychází z čistě geometrických úvah. Z obr. 3 lze snadno určit velikost úhlu β z vlastností $\triangle EOG$

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{|EO|}{|OG|} = \frac{|CA|}{|OG|} = \frac{2f\sin\alpha}{f} = 1,$$

odkud plyne, že $\beta = 45°$. Nyní již snadno vyjádříme velikost úhlu γ, neboť v $\triangle ODG$ musí platit

$$\gamma = 180° - \alpha - (180° - \beta) = \beta - \alpha.$$

Využijeme-li nyní sinovou větu pro $\triangle ODG$, dostáváme

$$y = |OG|\,\frac{\sin(180° - \beta)}{\sin\gamma} = f\,\frac{\sin\beta}{\sin(\beta - \alpha)} \approx 191{,}2\,\mathrm{cm}.$$

Podobné řešení nám poslala i *Jana Zajíčková*, využila paprsku $C - -H - -J - -D$, přičemž bod H leží v ohnisku čočky (po jejím otočení), tj. $|HO| = f$. Aplikujeme-li na $\triangle CHO$ kosinovou větu (opět $|CO| = 2f$), můžeme psát

$$|CH|^2 = (2f)^2 + f^2 - 2\cdot 2f\cdot f\cos\alpha,$$

odkud po úpravě dostaneme

$$a = f\sqrt{5 - 4\cos\alpha}.$$

V $\triangle CHO$ dále pomocí sinové věty určíme $\sphericalangle OCH$, pro který platí

$$\frac{|CH|}{\sin\alpha} = \frac{f}{\sin(\sphericalangle OCH)}$$

neboli

$$\sin(\sphericalangle OCH) = \frac{\sin\alpha}{\sqrt{5 - 4\cos\alpha}}$$

a po dosazení $\alpha = 30^\circ$ vychází $\sphericalangle OCH \approx 23{,}8^\circ$. Konečně pro $\sphericalangle HJO = 180^\circ - 90^\circ - (30^\circ - 23{,}8^\circ) \approx 36{,}2^\circ$ platí

$$\operatorname{tg}(\sphericalangle HJO) = \frac{f}{s}, \qquad s = \frac{f}{\operatorname{tg}(\sphericalangle HJO)}.$$

Známe-li, snadno spočítáme y, neboť

$$\sin\alpha = \frac{s}{y}$$

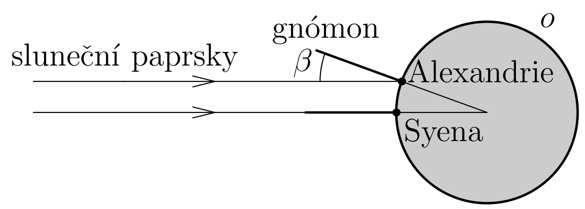
odkud

$$y = \frac{s}{\sin\alpha} = \frac{f}{\sin\alpha\operatorname{tg}(\sphericalangle HJO)} \approx 191{,}2\,\mathrm{cm}\cdot$$

Opět se obejdeme bez zobrazovací rovnice – děkujeme za dobrý nápad!

Poznámka:
Jeden z našich kolegů nás upozornil na nepřesnost v našem řešení. Platí totiž pouze pro tenkou čočku a především pouze *pro případ paraxiálních paprsků*, tj. paprsků, procházejících v bezprostřední blízkosti optické osy. Tato podmínka však pro úhel natočení 30°C není splněna a co víc – obraz předmětu se díky tomu vytvoří v jiné vzdálenosti v různých rovinách (nejčastěji se uvádí vodorovná a svislá). Potom je obecně těžké Neználkovy poradit (k tomu není zadáno dost údajů), ale experimentálně jsme ověřili, že by musel stínítko posunout na opačnou stranu, než jak vychází ve výpočtu pro paraxiální paprsky.
K tomu, abyste výsledek ověřili však nemůžete použít obyčejnou čočku (např. lupu), neboť ta má většinou tak velkou otvorovou vadu (paprsky vzdálenější od osy se lámou blíže k čočce), že nelze rozhodnout prakticky vůbec, obraz na stínítku je velmi neostrý. Tenké čočce se v tomto smyslu nejvíce podobá korigovaná soustava, u níž jsme zmíněný jev skutečně pozorovali – tj. posun obrazu po otočení čočky směrem k ní.

Úloha 4 Řecký učenec Eratosthenes (asi 276–194 př. n. l.) důmyslně odhadl obvod Země. Věděl, že v Syeně (městě na obratníku Raka, dnešní Asuán) se v pravé poledne v den letního slunovratu Slunce zrcadlí v hlubokých studnách. V Alexandrii ležící přibližně na stejném poledníku jako Syena pak použil nejjednodušší astronomický přístroj *gnómon*, tj. svislou rovnou tyč zaraženou kolmo do Země a zjistil, že v týž den svírají v Alexandrii sluneční paprsky s tyčí úhel $\beta = 7\frac{1}{5}^\circ$, tj. asi $360^\circ/50$ (obr. 4). Jízdou na velbloudech byla odhadnuta vzdálenost mezi Alexandrií a Syenou na $d = 5000$ stadií. Najděte (např. s pomocí stránky `http://www.jednotky.cz/`) kolika metrům a kilometrům tato vzdálenost odpovídá a dopočtěte, jaký byl Eratosthenův odhad obvodu Země. Jaká byla chyba odhadu ve srovnání s dnešní hodnotou?



Obr. 4: K úloze 4

Pozn.: Latinské označení délkové jednotky je (římský) „stadium“ a odhady v literatuře se mohou mírně lišit v určitém rozmezí, což nebude počítáno jako chyba, neboť úplně přesnou hodnotu neznáme! Uměli byste přepsat latinkou řecké označení $\sigma\tau\alpha\delta\iota o\nu$?
☞ **1. ročník 6 bodů, 2. ročník 5 bodů, 3. a 4. ročník 4 body**

Řešení:
Jak plyne z obr. 4 i z logické úvahy, pokud se Slunce v Syeně zrcadlilo v hlubokých studnách, muselo být v daný den v Syeně v zenitu a paprsky dopadaly (téměř) kolmo k zemskému povrchu. Jednoduchou geometrickou úvahou pro obvod Země o a vzdálenost d mezi Syenou a Alexandrií d dostáváme

$$\frac{d}{o} = \frac{\beta}{360^\circ}.$$

Odtud pro obvod Země vychází

$$o = d\,\frac{360^\circ}{\beta} = 250\,000\,\text{stadií}.$$

Použijeme-li hodnotu římského stadia podle výše uvedeného serveru 184,709 m ≈ 0,184 km, vychází obvod Země $o \approx 46\,177\,\mathrm{km}$. Současná hodnota poledníkového obvodu podle mezinárodního elipsoidu z roku 1967 je $o_\mathrm{s} \approx 40\,008\,\mathrm{km}$ (Brož J., Roskovec V., Valouch M.: *Fyzikální a matematické tabulky.* SNTL Praha 1980), takže chyba Erathostenova odhadu byla asi

$$\frac{o - o_\mathrm{s}}{o_\mathrm{s}} \approx 15\,\%.$$

Nepřesnost je pochopitelně dána tehdejší měřící technikou; dnes už se na velbloudy spoléhat nemůžeme. Nicméně elegantní myšlenka a i řádově správný výsledek si zaslouží náš obdiv i dnes. Jak jsme zjistili na internetu (`http://www.osel.cz/index.php?clanek=1554`), podobná měření se opakují i nyní v našich zeměpisných šířkách, konkrétně např. na Gymnáziu Františka Palackého ve Valašském Meziříčí.
Řecké označení $\sigma\tau\alpha\delta\iota o\nu$ přepsáno latinkou dává „stadion“ a jde o řecké označení jednotky, pro niž jsme použili běžnější latinský (římský) název „stadium“.

Úloha 5 (experimentální) Dáváte si k snídani tzv. „corn flakes“? Zkuste s nimi následující pokus. Polévkový talíř či mělčí misku naplňte vodou (můžete zkusit i mléko a porovnat) a až se kapalina ustálí pokládejte jednotlivé „flakesy“ opatrně do vzdálenosti asi 0,5 cm od sebe doprostřed talíře. Co pozorujete – zůstávají v místě, do něhož byly položeny? Co se stane, položíte-li je v blízkosti okraje talíře? Popište a pokuste se vysvětlit, co způsobuje tento jev. Pokud nemáte rádi „flakesy“, rozřežte si korkovou zátku na tenká kolečka a pokus vyzkoušejte s nimi, pokud máte připínáčky, které se udrží na hladině, můžete použít i je. ☞ **6 bodů**

Řešení:
Uvádíme řešení podle *Jany Zajíčkové z G Valašské Meziříčí*, jež bylo nejpřesnější; Jana ho navíc doprovodila i videoukázkou, kterou najdete na internetových stránkách semináře. K experimentu Jana použila malá kolečka papíru.
Kolečka papíru (flakesy apod.), která položíme do dostatečně malé vzdálenosti od sebe, se k sobě přibližují. Kolečka položená do dostatečně malé vzdálenosti od okraje talíře se k tomuto okraji také přibližují. Ve vysvětlení těchto dvou jevů (přibližování ke kraji nádoby a k sobě navzájem) hrají nejvýznamnější roli jevy na rozhraní vody a papíru (nebo na rozhraní vody a stěny talíře) související s povrchovým napětím. Povrchová blanka vody svírá s papírem nebo stěnou talíře určitý kontaktní úhel. Výslednice sil míří šikmo vzhůru, a jejich svislé složky spolu se vztlakovou silou vyrovnávají tíhovou sílu působící na papírové kolečko. Přiblíží-li se dvě papírová kolečka k sobě (nebo papírové kolečko k okraji talíře), změní se zakřivení hladiny mezi nimi, což vede ke zvětšení vodorovných složek povrchových sil a tím k přitahování papírových koleček k sobě navzájem (nebo k přitahování papírového kolečka k okraji nádoby), protože na opačných stranách papírových koleček se kontaktní úhly téměř nezmění.
Vysvětlení, že jde o magnetický vliv (jak bylo před časem prý uvedeno v jednom nejmenovaném pořadu jisté komerční televizní stanice) je nesprávné! Dodejme, že v anglické literatuře se tento jev někdy označuje podle jednoho z výrobců „corn flakesů“ jako „Cheerios effect“ (viz např. Vella D., Mahadevan L.: „The ‘Cheerios effect’“. *Am. J. Phys.* **73** (9) 2005, 817–825, kde je uvedeno i přesné odvození sil mezi plovoucími předměty, jež ale přesahuje rámec středoškolské fyziky).

Úloha 6 (sudoku) Všichni bez výjimky poslali správné řešení:

C	T	A	J	V	K	W	F	N
N	J	F	A	C	W	T	V	K
W	K	V	T	N	F	A	C	J
K	A	T	C	W	J	V	N	F
V	N	J	K	F	A	C	W	T
F	W	C	V	T	N	K	J	A
J	V	N	W	K	T	F	A	C
T	F	W	N	A	C	J	K	V
A	C	K	F	J	V	N	T	W

značka	jednotka	fyzikální veličina
A	ampér	elektrický proud
C	coulomb	elektrický náboj
F	farad	elektrická kapacita
J	joule	energie, práce
K	kelvin	teplota
N	newton	síla
T	tesla	magnetická indukce
V	volt	elektrické napětí
W	watt	výkon

☞ **5 bodů**