FyKoS 2006/2007: řešení 3. série
Tematické zaměření: vlhkost vzduchu

⌘ Úloha 1 Za letního dne před bouřkou byla při tlaku $p = 100\,\mathrm{kPa}$ a teplotě $t = 30°\mathrm{C}$ naměřena hustota vlhkého vzduchu (tj. hustota vzduchu a vodní páry v něm obsažené dohromady) $\varrho = 1140\,\mathrm{g{\cdot}m^{-3}}$. Najděte poměr dílčích tlaků vodní páry a samotného suchého vzduchu za těchto podmínek. Jak páru, tak suchý vzduch považujte za ideální plyn s molárními hmotnostmi $M_\mathrm{p} = 18\,\mathrm{g{\cdot}mol^{-1}}$ resp. $M_\mathrm{v} = 29\,\mathrm{g{\cdot}mol^{-1}}$, molární plynová konstanta $R = 8{,}31\,\mathrm{J{\cdot}mol^{-1}{\cdot}K^{-1}}$. ☞ **5 bodů**

Řešení:
Tlak vlhkého vzduchu je součtem parciálních tlaků suchého vzduchu a vodních par

$$p = p_\mathrm{v} + p_\mathrm{p},$$

podobně celková hustota je součtem hustoty vzduchu a vodních par

$$\varrho = \varrho_\mathrm{v} + \varrho_\mathrm{p}.$$

Pro suchý vzduch i samotnou vodní páru platí (v uvažovaném přiblížení) stavová rovnice

$$p_\mathrm{v} = \frac{\varrho_\mathrm{v}}{M_\mathrm{v}} RT, \quad p_\mathrm{p} = \frac{\varrho_\mathrm{p}}{M_\mathrm{p}} RT.$$

Řešením všech výše uvedených rovnic postupně dostáváme

$$\varrho_\mathrm{v} = \frac{\varrho M_\mathrm{v} - \dfrac{pM_\mathrm{p}M_\mathrm{v}}{RT}}{M_\mathrm{v} - M_\mathrm{p}}, \quad \varrho_\mathrm{p} = \frac{\dfrac{pM_\mathrm{p}M_\mathrm{v}}{RT} - \varrho M_\mathrm{p}}{M_\mathrm{v} - M_\mathrm{p}}.$$

Podělením stavových rovnic zároveň získáme

$$\frac{p_\mathrm{p}}{p_\mathrm{v}} = \frac{M_\mathrm{v}\varrho_\mathrm{p}}{M_\mathrm{p}\varrho_\mathrm{v}}.$$

Po dosazení za hustoty pak konečně pro podíl tlaků vychází

$$\frac{p_\mathrm{p}}{p_\mathrm{v}} = \frac{1 - \dfrac{pM_\mathrm{v}}{RT\varrho}}{\dfrac{pM_\mathrm{p}}{RT\varrho} - 1} \approx \frac{1}{40}.$$

Jak zjistíme v tabulkách, uvedené podmínky odpovídají vlhkosti asi 60 %. (Tlak nasycených vodních par při teplotě 30°C je asi 4,24 kPa). Sami se také můžete přesvědčit, že číselná hodnota výsledku je velmi citlivá a zadaných vstupních hodnotách (i např. na přesnosti, s jakou dosadíte molární plynovou konstantu R. To je proto, že tlak par porovnáváme s tlakem vzduchu, který je poměrně velký.

⌘ Úloha 2 V parní lázni byla při teplotě $t_1 = 100°\mathrm{C}$ relativní vlhkost vzduchu $\varphi_1 = 50\,\%$. Poté teplota klesla na $t_2 = 97°\mathrm{C}$ a část páry zkondenzovala, takže relativní vlhkost vzduchu klesla na $\varphi_2 = 45\,\%$. Jestliže byl objem lázně $V = 30\,\mathrm{m^3}$, určete hmotnost zkondenzované vodní páry. Víte, že tlak nasycených vodních par při teplotě t_1 je $p_\mathrm{s1} = 760\,\mathrm{torr}$, při teplotě t_2 je o 80 torr nižší. Vodní páru považujte za ideální plyn s molární hmotností $M_\mathrm{p} = 18\,\mathrm{g{\cdot}mol^{-1}}$. Převodní vztah pro 1 torr neboli 1 mm sloupce rtuti najdete buď v tabulkách nebo na `http://www.jednotky.cz/tlak/`. ☞ **5 bodů**

Řešení:
Jak jste správně zjistili, 1 torr ≈ 133 Pa, proto při teplotě $t_1 = 100°\mathrm{C}$ je tlak nasycených vodních par $p_\mathrm{s1} = 760\,\mathrm{torr} \approx 100\,\mathrm{kPa}$, při teplotě $t_2 = 97°\mathrm{C}$ je tlak nasycených vodních par $p_\mathrm{s2} = 760 - 80 = 680\,\mathrm{torr} \approx 90{,}6\,\mathrm{kPa}$. Ze stavové rovnice získáváme

$$m_1 = \frac{\varphi_1 p_\mathrm{s1} V M_\mathrm{p}}{RT_1}, \qquad m_2 = \frac{\varphi_2 p_\mathrm{s2} V M_\mathrm{p}}{RT_2}.$$

Odtud pro hmotnost zkondenzované páry vychází

$$\Delta m = m_1 - m_2 = \frac{VM_\mathrm{p}}{R}\left(\frac{\varphi_1 p_\mathrm{s1}}{T_1} - \frac{\varphi_2 p_\mathrm{s2}}{T_2}\right) \approx 1{,}6\,\mathrm{kg}.$$

Úloha 3 Vydejme se z horké lázně zchladit do Arktidy. Na ploché ledové kře tvaru desky s plochou $S = 70\,\mathrm{m^2}$ stojí lední medvěd o hmotnosti $m = 700\,\mathrm{kg}$. Horní plocha kry přitom vyčnívá do výšky $h = 10\,\mathrm{cm}$ nad hladinou. Odhadněte, v jaké hloubce pod hladinou se nachází spodní část ledové kry? Uvažujte hustotu vody $\varrho_\mathrm{v} = 1\,000\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$ a hustotu ledu $\varrho_\mathrm{l} = 900\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$. ☞ **1. ročník 6 bodů, 2. ročník 5 bodů, 3. a 4. ročník 4 body**

Řešení:
Označme x hledanou hloubku. Hmotnost kry bude $m_l = S\,(h + x)\,\varrho_l$. Celková tíha kry i s medvědem bude $g\,[m + S\,(h + x)\,\varrho_l]$. Vztlaková síla působící na ponořenou část kry pak bude $\varrho_v Sx$. Aby kra i s medvědem plavala, musí být obě síly v rovnováze, tj.

$$g\,[m + S\,(h + x)\,\varrho_l] = \varrho_v Sx,$$

odkud

$$x = \frac{m + Sh\varrho_l}{S\,(\varrho_v - \varrho_l)} \approx 1\,\mathrm{m}.$$

Obr. 1: K úloze 4

Úloha 4 Pokusme se o modernější verzi určení poloměru Země než v minulé sérii. Použijeme k tomu údaje na internetu a zároveň Vám trochu přiblížíme část Olomouce, kde se nachází většina fyzikálních pracovišť Přírodovědecké fakulty UP.

a) Na serveru `http://www.mapy.cz/` najděte polohu jedné z našich budov s adresou „17. listopadu 50a“ a určete zeměpisnou šířku a délku této budovy (nejlépe spodního konce červeného ukazatele budovy; jak údaje zadáte vám napovídá obr. 1). Určování GPS souřadnic zapnete kliknutím na prostřední tlačítko v nabídce (viz. obr. 1). Abyste získali podobný obrázek, přepněte si mapu na „hybridní“.

b) Rozhodněte, zda byly použité letecké snímky Olomouce pořízeny ráno, okolo poledne nebo navečer.

c) Na mapě si najděte další bod v blízkosti železniční stanice Olomouc, hlavní nádraží (nejlépe se stejnou zeměpisnou šířkou; napovídá opět obrázek) a odečtěte jeho zeměpisnou šířku a délku. Pomocí funkce „měření vzdálenosti“ zjistěte vzdálenost tohoto bodu od zmíněné budovy PřF UP.

d) Pomocí získaných údajů dopočtěte poloměr Země za předpokladu, že je dokonalou koulí a porovnejte ho s tabulkovou hodnotou. Pro motivaci přiznejme, že při autorském řešení nám vyšla chyba okolo 7,5 % – máte šanci být lepší, ale zároveň nemusíte být smutní, pokud budete méně přesní, jde hlavně o princip!

☞ **1. ročník 10 bodů, 2. ročník 8 bodů, 3. a 4. ročník 6 bodů**

Řešení:
Nakonec se i nám podařilo zlepšit přesnost měření, takže uvádíme námi zjištěné hodnoty, Vaše údaje se buď shodovali a nebo vesměs lišily velmi málo.

a) Zeměpisná šířka naší budovy $\varphi = 49^\circ\ 35'\ 36{,}45''$, zeměpisná délka $\vartheta_1 = 17^\circ\ 15'\ 56{,}75''$, zeměpisná délka.

b) Odpověď byla samozřejmě, že snímky byly pořízeny ráno – stíny budov směřují na západ.

c) Zeměpisná šířka druhého bodu by měla být pro další výpočet stejná (což se nám podařilo), zeměpisná délka je $\vartheta_2 = 17^\circ\ 16'\ 39{,}69''$. Odpovídající vzdálenost je potom $d = 861\,\mathrm{m}$.

d) V tomto bodě se někteří nechali zmást. Podle obr. 2 představuje vzdálenost d část kružnice (samozřejmě v přiblížení, kdy Zemi považujeme za kouli, což se ale ukazuje pro naše účely dostatečné) a platí

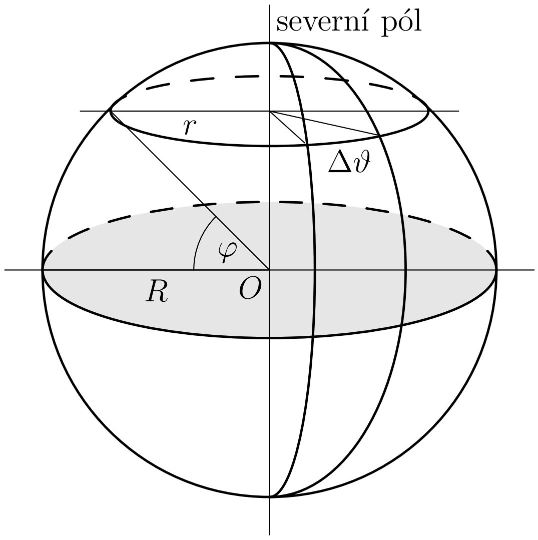
$$d = 2\pi r\,\frac{\vartheta_2 - \vartheta_1}{360^\circ\mathrm{C}},$$

kde r není poloměr Země R, ale poloměr příslušné rovnoběžky (proto jsme požadovaly stejnou zeměpisnou šířku, aby oba body ležely na jedné rovnoběžce), tj. $r = R\cos\varphi$. Po dosazení vychází

$$d = 2\pi R\cos\varphi\,\frac{\vartheta_2 - \vartheta_1}{360^\circ\mathrm{C}}$$

a

$$R = \frac{d}{2\pi\cos\varphi}\,\frac{360^\circ\mathrm{C}}{\vartheta_2 - \vartheta_1} \approx 6380\,\mathrm{km}.$$



Obr. 2: K úloze 4

Porovnáním ze známou hodnotou $R_Z = 6370\,\mathrm{km}$ pak zjistíme, že chyba našeho „měření" je

$$\delta = \left|\frac{R - R_Z}{R_Z}\right| \approx 0{,}03\,\%.$$

I když je chyba o něco zmenšena zaokrouhlením, není to hezký důkaz přesnosti digitální mapy a GPS souřadnic?

Úloha 5 (experimentální) Blíží se Velikonoce, vyzkoušejme proto dva experimenty s vajíčky. Pokud máte strach, že skořápky vajíček jsou příliš křehké, můžete použít i různé umělohmotné náhrady téhož tvaru, např. ze známých „kinder překvapení". Raději neprovádějte pokusy nad kobercem či čímkoli jiným, odkud by nešly případné skvrny odstranit!

a) Vyfouklé vajíčko po vysušení naplňte asi z jedné pětiny pískem (jemným cukrem, solí apod.) a poté oba otvory zatavte např. voskem. Zkuste pak vajíčko postavit „na špičku" či ze šikma a po chvilce pusťte. Pokud Vám zůstane stát i v nečekaných polohách, vysvětlete, jak je to možné (budete-li chtít překvapit kamarády, můžete zalepené otvory zamaskovat bílou barvou).

b) Vezměte si uvařené vajíčko a položte na podlahu (nesmí být příliš kluzká ani s velkým třením, linoleum či parkety bývají vesměs vyhovující), potom vajíčko uchopte a rychle roztočte (chce to trošku cviku) tak, aby se alespoň na chvíli „postavilo" do svislé polohy. Podaří-li se Vám to, napište nám stručné vysvětlení či alespoň jiné příklady tohoto jevu.

☞ **1. ročník 8 bodů, 2. ročník 6 bodů, 3. a 4. ročník 4 body**

Řešení:

a) Příčinou stability je písek, který se přesypává dolů a má rozhodující vliv na polohu těžiště vajíčka. Zatímco u plného vajíčka je poloha těžiště stálá a je jím také určena rovnovážná poloha, u prázdného vajíčka s trochou písku nebo jiného materiálu se jeho poloha mění podle polohy, v níž vajíčko držíme, a zaujme vždy tu nejnižší z možných poloh.

b) Tato druhá část je na vysvětlení o něco obtížnější, náš pokus ale ilustruje sklon těles (jsou-li roztočena dostatečně rychle) otáčet se kolem volné osy, která je zároveň i osou symetrie. Ležící vejce se neotáčí kolem volné osy (není okolo této osy symetrické); díky působené setrvačných sil a spolupůsobení tření si hledá volnou osu a nalézá ji v rotaci kolem své podélné osy – tj. ve svislé poloze. Jakmile se ale rotace zpomalí, opět se položí a před zastavením už bude rotovat „v leže".

Úloha 6 (křížovka) Řešení křížovky, u níž ani jeden z Vás řešitelů nezaváhal, je následující:

				E	I	N	S	T	E	I	N							
								E	L	E	V	A	C	E				
						A	K	C	E									
									K	O	N	D	E	N	Z	A	C	E
			T	R	A	J	E	K	T	O	R	I	E					
						P	A	P	R	S	E	K						
							I	Z	O	T	E	R	M	A				
							O	H	M									
									A	M	P	É	R					
									G	R	A	V	I	T	A	C	E	
								E	N	E	R	G	I	E				
				P	E	R	I	G	E	U	M							
							S	E	T	R	V	A	Č	N	O	S	T	
						P	E	R	I	O	D	A						
							D	E	C	I	B	E	L					
						S	M	Y	K	O	V	É						
B	A	L	I	S	T	I	C	K	Á									
					I	R	I	D	I	U	M							
					Ú	Č	I	N	N	O	S	T						
									D	E	F	O	R	M	A	C	E	
						P	R	O	U	D	N	I	C	E				
						T	L	A	K	O	M	Ě	R					
					P	L	A	N	C	K	O	V	A					
					P	E	R	P	E	T	U	U	M					

1 příjmení asi nejznámějšího fyzika a autora teorie relativity
2 označení pro chování vody v tenkých trubicích, jehož opakem je kapilární deprese např. u rtuti
3 reakci podle 3. Newtonova zákona vyvolává…
4 označení pro fázovou změnu skupenství plynného na kapalné, jež je možná jen při teplotě nižší než kritické
5 označení pro množinu bodů, jimiž částice prochází během pohybu
6 orientovaná čára, kterou znázorňujeme šíření světla
7 grafické znázornění závislosti objemu a tlaku plynu při konstantní teplotě
8 jednotka odporu pojmenovaná po německém fyzikovi od jehož narození 16. března uplyne 220 let 9 jednotka elektrického proudu proudu v soustavě SI nazvaná po francouzském fyzikovi narozeném 22. 1. 1775 v Poleymieux u Lyonu
10 vzájemná a obecná přitažlivost těles, kvůli níž prý jednou spadlo Isaacu Newtonovi na hlavu jablko
11 jedna z nejdůležitějších fyzikálních veličin, pro níž platí zákon zachování a kterou udáváme např. v Joulech v kWh
12 bod, v němž je družice Země obíhající po eliptické dráze ke středu Země nejblíže
13 obecná vlastnost pohybujících se těles zmíněná v 1. Newtonově zákoně, díky níž můžeme např. při prudkém zabrzdění přeletět přes řídítka
14 doba kmitu nebo obecně opakování nějakého děje
15 logaritmická míra hladiny intenzity zvuku známá především díky měření hluku
16 označení pro druh tření, jež má původ v nerovnostech styčných ploch těles při posouvání po sobě
17 křivka, již popisujeme šikmý vrh při započítání odporu vzduchu, důležitá zejména pro popis pohybu střel
18 prvek, z něhož je kromě platiny zhotoven prototyp kilogramu v Mezinárodního úřadu pro míry a váhy v Sèvres
19 podíl výkonu a příkonu u strojů
20 změna tvaru pružných těles tlakem nebo tahem
21 čáry znázorňující proudění částic tekutiny; jejich tečny v libovolném bodě mají směr rychlosti
22 přístroj, jehož údaje odečítáme v pascalech; manometr
23 název konstanty s hodnotou $h = 6{,}6260755 \cdot 10^{-34}$ J·s nazvané po německém fyzikovi, zakladateli kvantové teorie a laureátu Nobelovy ceny za fyziku pro rok 1918
24 první slovo označení hypotetického stroje, který pro svůj chod nepotřebuje žádný vnější zdroj energie, též latinsky věčný, věčně

Jev obsažený v tajence – *elektromagnetická indukce* – je pochopitelně důležitý z hlediska výroby elektrické energie, neboť různé typy turbín pohánějí nakonec alternátor, založený právě na elektromagnetické indukci. Takže bez ní bychom si skutečně ani posvítili, ani nemohli zapnout počítač. ☞ **6 bodů**

Dodatek k minulé sérii

Jeden z našich kolegů nás upozornil na nepřesnost v řešení 3. úlohy 2, série (Neználek s čočkou). Řešení, které jsme uvedli, platí pouze pro tenkou čočku a především pouze *pro případ paraxiálních paprsků*, tj. paprsků, procházejících v bezprostřední blízkosti optické osy. Tato podmínka však pro úhel natočení 30°C není splněna a co víc – obraz předmětu se díky tomu vytvoří v jiné vzdálenosti v různých rovinách (nejčastěji se uvádí vodorovná a svislá). Potom je obecně těžké Neználkovy poradit, ale experimentálně jsme ověřili, že by musel stínítko posunout na opačnou stranu, než jak vychází ve výpočtu pro paraxiální paprsky.
K tomu, abyste výsledek ověřili však nemůžete použít obyčejnou čočku (např. lupu), neboť ta má většinou tak velkou otvorovou vadu (paprsky vzdálenější od osy se lámou blíže k čočce), že nelze rozhodnout prakticky vůbec, obraz na stínítku je velmi neostrý. Tenké čočce se v tomto smyslu nejvíce podobá korigovaná soustava, u níž jsme zmíněný jev skutečně pozorovali – tj. posun obrazu po otočení čočky směrem k ní..