Matematický korespondenční seminář 1. (14.) ročník

Řešení 1. série

Úloha 1.

Určete nejmenší přirozené číslo dělitelné jedenácti, jehož součet číslic je 2005.

Řešení:

Protože $2005 = 9 \cdot 222 + 7$, je hledané číslo složeno z alespoň 223 číslic. Pokud najdeme nejmenší číslo n vyhovující zadání úlohy, které je složeno právě z 223 číslic, bude úloha vyřešena.

Číslo, které je zapsáno pomocí 223 číslic, se součtem číslic 2005 se skládá z alespoň 221 číslic 9, zbývající dvě číslice jsou buď 8 a 8, nebo 7 a 9. Pokud se v desítkovém zápisu čísla dělitelného 11 vyskytuje na místě i číslice různá od devíti a na místě $i + 2$ číslice 9, potom jestliže tyto dvě číslice zaměníme, číslo zůstane dělitelné 11 a zároveň se zmenší. Proto hledané číslo bude nejmenší, pokud se budou číslice menší než 9 vyskytovat na prvních místech jeho desítkového zápisu.

Nechť k je číslo, které je v desítkové soustavě zapsáno pomocí 220 číslic 9. Potom k je dělitelné jedenácti a hledané číslo n můžeme zapsat ve tvaru $n = r \cdot 10^{220} + k$, kde r je trojmístné číslo, které je složeno buď z číslic 8, 8, 9, nebo z číslic 7, 9, 9. Číslo n bude dělitelné jedenácti, právě když r bude dělitelné jedenácti. Žádné trojmístné číslo složené z číslic 8, 9, 9 není dělitelné 11. Jediné trojmístné číslo složené z číslic 7, 9, 9, které je dělitelné 11 je číslo 979. Proto nejmenší přirozené číslo n, které je dělitelné 11 a jeho ciferný součet je 2005 je číslo

$$n = 97\overbrace{99\ldots9}^{221 \text{ číslic}}.$$

Úloha 2.

Na stole je položeno $2n$ (n je přirozené číslo) mincí lícem nahoru. Je dáno přirozené číslo $a < 2n$. Při každém tahu zvolíme a mincí, které obrátíme. Dokažte, že po konečném počtu tahů můžeme dosáhnout postavení, při kterém mají všechny mince nahoře rub.

Řešení:

Můžeme použít například tento postup. Zvolíme libovolných $a + 1$ mincí. V prvním tahu otočíme prvních a mincí, ve druhém posledních a mincí. Tím se první a poslední z a mincí otočí a zbývající zaujmou původní polohu. Otočíme tak dvě z původních $2n$ mincí. Provedeme-li tento dvojtah n-krát, můžeme otočit všechny mince na rub.

Úloha 3.

Z 35 shodných kuliček je postavena pyramida tvaru pravidelného čtyřstěnu. Kolik zde existuje dvojic dotýkajících se kuliček?

Řešení:

Každá hrana čtyřstěnu je tvořena 5 kuličkami. Kuličky rozdělíme do pěti disjunktních skupin.

(A) kuličky ve vrcholech čtyřstěnu, ty jsou čtyři, každá z nich se dotýká tří dalších kuliček. Dohromady 12 doteků.
(B) kuličky dotýkající se kuliček ve vrcholech čtyřstěnu. Těch je 12. Každá z nich se dotýká 6 dalších kuliček. Celkem 72 doteků.
(C) kuličky ve středech hran čtyřstěnu. Těch je 6. Každá z nich se dotýká 6 dalších kuliček. Celkem je mezi nimi 36 doteků.
(D) kuličky ležící na stěnách čtyřstěnu, které nepatří do žádné z předcházejících skupin. Těch je 12. Každá z nich se dotýká 9 kuliček. Celkem 98 doteků.
(E) jedna kulička, která leží uvnitř čtyřstěnu. Ta se dotýká 12 dalších kuliček.

Mezi těmito kuličkami je celkem 220 dotyků, každý dotyk je ovšem započítán dvakrát, tedy existuje 110 dvojic dotýkajících se kuliček.

Úloha 4.

V řadě je 9 dolíků. Kolika způsoby můžeme do těchto dolíků umístit 3 modré, 3 zelené a 3 červené kuličky tak, aby v každém dolíku byla právě jedna kulička a žádné dvě kuličky stejné barvy neležely vedle sebe.

Řešení:

Uvažujme všechna možná rozmístění modrých (•) a zelených (○) kuliček. Zakresleme jen ta rozmístění, kde modrá kulička zleva předchází zelenou (každému takovému rozmístění odpovídá rozmístění, kde vyměníme modré a zelené kuličky). Mezi ně pak rozmisťujeme červené kuličky. Značka **|** znamená, že na dané místo musíme červenou kuličku umístit. Číslo vpravo udává počet možných rozmístění červených kuliček.

• | • | • ○ | ○ | ○ 0
• | • ○ • ○ | ○ 5
• | • ○ | ○ • ○ 5
• | • ○ | ○ | ○ • 1
• ○ • | • ○ | ○ 5
• ○ • ○ • ○ 35
• ○ • ○ | ○ • 15
• ○ | ○ • | • ○ 5
• ○ | ○ • ○ • 15
• ○ | ○ | ○ • | • 1

Celkem tedy dostáváme $2 \cdot 87 = 174$ možností.

Úloha 5.

Určete všechna přirozená čísla, která jsou rovna jedenáctinásobku svého součtu číslic.

Řešení:

Mezi jednomístnými čísly neexistuje přirozené číslo, které by bylo rovno jedenáctinásobku svého součtu číslic.

Nyní uvažujme dvoumístná čísla $\overline{ab}$ tvořená číslicemi a a b. Musí platit $10a+b = 11(a+b)$, což dává $a + 10b = 0$, což není možné.

Uvažujme trojmístná čísla $\overline{abc}$ tvořená číslicemi a, b a c. Platí $100a+10b+c = 11(a+b+c)$, neboli $89a = b + 10c$. Odtud $a = 1$, $c = 8$, $b = 9$.

Součet číslic n-místného čísla není větší než $9n$. Jedenáctinásobek je $99n$. Aby toto číslo bylo alespoň n-místné, musí platit $10^{n-1} \leq 99n$. Což pro $n \geq 4$ není možné.

Existuje jediné číslo vyhovující zadání, a to 198.

Úloha 6.

Tabulka čokolády se skládá z 8×4 čtverečků. Kolikrát nejméně musíme čokoládu lámat, abychom ji rozlámali na jednotlivé čtverečky? (Je dovoleno lámat pouze po přímkách a vždy pouze jeden kus čokolády.)

Řešení:

Máme-li na stole n kusů čokolády a jeden rozlomíme, dostaneme na stole $n + 1$ kusů. Čokoláda se skládá ze 32 čtverečků a proto nejmenší (a také jediný) počet rozlomení je roven 31.