Matematický korespondenční seminář 1. (14.) ročník

Řešení 2. série

Úloha 1.

Nechť a_1 je libovolná číslice ($a_1 \in \{0, 1, \ldots, 9\}$). Pro každé přirozené číslo n označme a_{n+1} poslední číslici zápisu čísla $19a_n + 98$ v desítkové soustavě. Dokažte, že číslo $0{,}a_1a_2a_3\ldots$ je racionální.

Řešení:

Pro všechna přirozená čísla n platí

$$a_{n+2} \equiv 19a_{n+1} + 98 = 19(19a_n + 98) + 98 \equiv a_n \pmod{10},$$

tedy číslice a_{n+2} a a_n jsou stejné. Číslo $0{,}a_1a_2a_3\ldots$je periodické s periodou 2, tedy racionální.

Úloha 2.

Najděte všechny dvojice (p, q) reálných čísel takové, že $p+q = 1998$ a rovnice $x^2+px+q = 0$ má dva různé celočíselné kořeny.

Řešení:

Označme x_1 a x_2 celočíslené kořeny rovnice $x^2 + px + q = 0$. Podle Viètových vztahů platí $p = -(x_1 + x_2)$ a $q = x_1x_2$, tedy p a q jsou celá čísla. Rovnost

$$1998 = p + q = -x_1 - x_2 + x_1x_2$$

je ekvivalentní s rovostí

$$(x_1 - 1)(x_2 - 1) = 1999.$$

Všechny možnosti rozkladu prvočísla 1999 na součin celých čísel si zapíšeme do tabulky

$x_1 - 1$	-1999	-1	1	1999
$x_2 - 1$	-1	-1999	1999	1
x_1	-1998	0	2	2000
x_2	0	-1998	2000	2
$p = -(x_1 + x_2)$	1998	1998	-2002	-2002
$q = x_1x_2$	0	0	4000	4000

Všechny dvojice reálných čísel (p, q), pro které má daná rovnice právě dva různé celočíselné kořeny jsou dvojice $(1998, 0)$ a $(-2002, 4000)$.

Úloha 3.

Určete všechny trojice (a, b, c) přirozených čísel takové, že $1 \le a \le b \le c$ a platí

$$\frac{1}{a+2} + \frac{1}{b+2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{c+2}.$$

Řešení:

Ze vztahu $b \geq a$ plyne

$$\frac{1}{a+2} + \frac{1}{b+2} \leq \frac{2}{a+2}.$$

Kdyby $a \geq 2$, potom

$$\frac{1}{a+2} + \frac{1}{b+2} \leq \frac{1}{2} < \frac{1}{2} + \frac{1}{c+2}.$$

Tedy $a = 1$. Rovnice

$$\frac{1}{b+2} + \frac{1}{3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{c+2}$$

je ekvivalentní s rovnicí

$$-36 = (b-4)(c+8).$$

Platí $c+8 > 8$. Pouze čísla 9, 12, 18 a 36 jsou přirozenými děliteli čísla -36 většími než 8. Tedy c je rovno 1, 4, 10, 28. Těmto číslům odpovídají po řadě čísla b rovny 0, 1, 2, 3.

Všechny trojice čísel přirozených čísel (a, b, c), které vyhovují dané rovnici, jsou trojice $(1, 1, 4)$, $(1, 2, 10)$ a $(1, 3, 28)$.

Úloha 4.

V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic

$$x^2 + xy + y^2 = 21,$$
$$x^2 - xy + y^2 = 13.$$

Řešení:

Označme $a = x + y$, $b = xy$, potom

$$21 = x^2 + xy + y^2 = (x+y)^2 - xy = a^2 - b,$$
$$13 = x^2 - xy + y^2 = (x+y)^2 - 3xy = a^2 - 3b.$$

Odečtením obou rovnic dostaneme $b = 4$, tedy $a \in \{-5, 5\}$. Čísla x a y jsou kořeny rovnice $x^2 - ax + b = 0$. Dvojicím (a, b) ve tvaru $(-5, 4)$ a $(5, 4)$ odpovídají tedy dvojice (x, y) ve tvaru $(-1, -4)$, $(-4, -1)$, $(1, 4)$ a $(4, 1)$, které jsou řešením naší úlohy.

Úloha 5.

Určete všechny trojice (a, b, c) přirozených čísel takové, že čísla a^2+1 a b^2+1 jsou prvočísla a platí

$$(a^2 + 1)(b^2 + 1) = c^2 + 1.$$

Řešení:

Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že $a \leq b$. Označme $p = b^2 + 1$. Číslo $(c^2+1) - (b^2 + 1) = (c-b)(c+b)$ je dělitelné p. Ze zadání plyne $b < c$ a

$$c = \sqrt{(a^2+1)(b^2+1) - 1} \leq \sqrt{(b^2+1)^2 - 1} < b^2 + 1 = p.$$

Odtud $c - b < p$ a $c + b < 2p$. Jelikož $p \mid (c-b)(c+b)$, platí nutně $c + b = p$, tedy $c = b(b-1) + 1$. Čísla $a = 1$ a $b = 1$ nevyhovují dané rovnici, tedy $b \geq 2$. Tedy prvočíslo p je liché. Ze vztahu

$c = b(b-1) + 1$ plyne, že číslo c je liché, tedy $a^2 + 1$ je sudé prvočíslo. Odtud $a = 1$. Ze zadané rovnice platí

$$2(b^2 + 1) = (c^2 + 1) = ((b(b-1) + 1) + 1)^2 + 1,$$

tedy $(b(b-1))^2 = 4$. Proto $b = 2$ a $c = 3$.

Hledané trojice přirozených čísel (a, b, c) jsou $(1, 2, 3)$ a $(2, 1, 3)$.

Úloha 6.

Určete všechny funkce $f\colon \mathsf{R} \to \mathsf{R}$ takové, že pro všechna reálná čísla x platí

$$f(x) + x\,f(1-x) = x^2 + 1.$$

Řešení:

Nechť t je libovolné reálné číslo. Potom $x = t$ je reálné číslo a platí

$$f(t) + t\,f(1-t) = t^2 + 1.$$

Číslo $x = 1 - t$ je reálné a platí

$$f(1-t) + (1-t)\,f(t) = (1-t)^2 + 1.$$

Z předešlých dvou rovností plyne. První rovnici vynásobíme -1, druhou t, rovnice sečteme a dostaneme

$$(-1 + t - t^2)\,f(t) = t^3 - 3t^2 + 2t - 1.$$

Jelikož $-1 + t - t^2 \neq 0$ pro všechna reálná čísla t, platí nutně

$$f(t) = \frac{-t^3 + 3t^2 - 2t + 1}{t^2 - t + 1}.$$

Zkouškou ověříme, že tato funkce je řešením dané rovnice.