Matematický korespondenční seminář 1. (14.) ročník

2. série

Vážení přátelé, uvádíme druhou sérii MKS. Svá řešení odešlete do 20. prosince 2006 buď poštou na adresu:

RNDr. Pavel Calábek, Ph.D
Katedra algebry a geometrie PřF UP
Tomkova 40
779 00 Olomouc

na obálku napište MKS, nebo e-mailem na adresu calabek@aix.upol.cz, do předmětu napište MKS 2. kolo. Po tomto datu najdete na adrese http://isouteze.upol.cz/mks zadání příkladů 3. kola a výsledky a vzorová řešení 1. kola.

Limit pro získání prémie je $2(r+3)$.

Úloha 1.

Nechť a_1 je libovolná číslice ($a_1 \in \{0, 1, \dots, 9\}$). Pro každé přirozené číslo n označme a_{n+1} poslední číslici zápisu čísla $19a_n + 98$ v desítkové soustavě. Dokažte, že číslo $0{,}a_1a_2a_3\dots$ je racionální.

Úloha 2.

Najděte všechny dvojice (p, q) reálných čísel takové, že $p+q = 1998$ a rovnice $x^2+px+q = 0$ má dva různé celočíselné kořeny.

Úloha 3.

Určete všechny trojice (a, b, c) přirozených čísel takové, že $1 \le a \le b \le c$ a platí

$$\frac{1}{a+2} + \frac{1}{b+2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{c+2}.$$

Úloha 4.

V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic

$$x^2 + xy + y^2 = 21,$$
$$x^2 - xy + y^2 = 13.$$

Úloha 5.

Určete všechny trojice (a, b, c) přirozených čísel takové, že čísla a^2+1 a b^2+1 jsou prvočísla a platí

$$(a^2 + 1)(b^2 + 1) = c^2 + 1.$$

Úloha 6.

Určete všechny funkce $f\colon \mathsf{R} \to \mathsf{R}$ takové, že pro všechna reálná čísla x platí

$$f(x) + xf(1-x) = x^2 + 1.$$