Matematický korespondenční seminář 1. (14.) ročník

Řešení 3. série

Úloha 1.

Dokažte, že pro libovolná kladná reálná čísla a, b platí

$$\frac{a+b}{1+a+b} \leq \frac{a}{1+a} + \frac{b}{1+b}.$$

Řešení:

Čísla a, b jsou kladná, proto platí

$$\frac{a}{1+a+b} \leq \frac{a}{1+a} \qquad \text{a} \qquad \frac{b}{1+a+b} \leq \frac{b}{1+b}.$$

Sečtením těchto nerovností dostaneme požadovanou rovnost.

Úloha 2.

Ukažte, že pro všechna reálná čísla a, b ($a \neq 0$) platí

$$a^2 + b^2 + \frac{1}{a^2} + \frac{b}{a} \geq \sqrt{3}.$$

Řešení:

Postupnými úpravami výrazu dostaneme

$$a^2 + b^2 + \frac{1}{a^2} + \frac{b}{a} - \sqrt{3} = \left(a^2 - \sqrt{3} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{a^2}\right) + \left(b^2 + \frac{b}{a} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{a^2}\right) =$$
$$= \left(a - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{a}\right)^2 + \left(b + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{a}\right)^2.$$

Součet druhých mocnin je nezáporné číslo, proto platí nerovnost

$$a^2 + b^2 + \frac{1}{a^2} + \frac{b}{a} - \sqrt{3} \geq 0,$$

která je ekvivalentní se zadanou nerovností. Rovnost v ní nastává, právě když

$$a = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{a} \qquad \text{a} \qquad b = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{a},$$

tedy právě když

$$a = \varepsilon \frac{\sqrt[4]{3}}{\sqrt{2}} \qquad \text{a} \qquad b = -\varepsilon \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt[4]{3}},$$

kde $\varepsilon \in \{-1, 1\}$.

Úloha 3.

Jsou dána reálná čísla a, b, c tak že platí $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Dokažte, že potom platí

$$-\frac{1}{2} \leq ab + bc + ca \leq 1.$$

Řešení:

Pro libovolná reálná čísla a, b, c taková, že $a^2 + b^2 + c^2 = 1$, platí

$$0 \leq (a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca) = 1 + 2(ab + bc + ca).$$

Úpravou této nerovnosti dostaneme

$$-\frac{1}{2} \leq ab + bc + ca,$$

což je první z dokazovaných nerovností.

Dále platí

$$0 \leq (a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 = 2(a^2 + b^2 + c^2) - 2(ab + bc + ca) = 2 - 2(ab + bc + ca).$$

Úpravou této nerovnosti teď dostaneme druhou dokazovanou nerovnost

$$ab + bc + ca \leq 1.$$

Úloha 4.

Dokažte, že pro libovolné reálné číslo a platí

$$2^{\sin a} + 2^{\cos a} \geq 2^{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}.$$

Řešení:

Podle nerovnosti mezi aritmetickým a geometrickým průměrem pro dvě kladná čísla $2^{\sin a}$ a $2^{\cos a}$ platí

$$\sqrt{2^{\sin a} \cdot 2^{\cos a}} \leq \frac{2^{\sin a} + 2^{\cos a}}{2}, \quad \text{tedy} \quad 2^{\sin a} + 2^{\cos a} \geq 2^{1+\frac{1}{2}(\sin a + \cos a)}.$$

Pro libovolné reálné číslo a platí

$$\sin a + \cos a = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin a + \frac{1}{\sqrt{2}}\cos a\right) =$$
$$= \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}\sin a + \sin\frac{\pi}{4}\cos a\right) == \sqrt{2}\sin\left(a + \frac{\pi}{4}\right).$$

Obor hodnot funkce sinus je interval $\langle -1, 1\rangle$, platí proto $\sin\left(a + \frac{\pi}{4}\right) \geq -1$, a tedy

$$\sin a + \cos a \geq -\sqrt{2}.$$

Odtud již dostáváme

$$1 + \frac{1}{2}(\sin a + \cos a) \geq 1 - \frac{\sqrt{2}}{2},$$

tedy

$$2^{1+\frac{1}{2}(\sin a+\cos a)} \geq 2^{1-\frac{\sqrt{2}}{2}},$$

což spolu s první nerovností dává dokazovanou nerovnost.

Úloha 5.

Najděte všechna kladná reálná čísla x tak, že platí

$$3x^2 + 4 \leq 4\sqrt{2}\left(\sqrt{x}\right)^3.$$

Řešení:

Podle nerovnosti mezi aritmetickým a geometrickým průměrem platí pro kladná čísla x^2, x^2, x^2, 4 nerovnost

$$\frac{x^2 + x^2 + x^2 + 4}{4} \geq \sqrt[4]{x^2x^2x^24},$$

což můžeme upravit na tvar

$$3x^2 + 4 \geq 4\sqrt{2}\left(\sqrt{x}\right)^3.$$

Rovnost v této nerovnosti nastává, právě když

$$x^2 = x^2 = x^2 = 4, \qquad \text{tedy} \qquad x = 2.$$

Proto množina všech kladných reálných čísel, které vyhovují dané nerovnosti je jednobodová a obsahuje číslo 2.

Úloha 6.

Určete všechny funkce $f\colon \mathsf{N} \to \mathsf{R}$ takové, že pro všechna přirozená čísla k a m vyhovující podmínce $2m \leq k \leq 3m$ platí

$$f(k+m) = f(k) + f(m).$$

Řešení:

Nechť f je funkce, která vyhovuje dané funkcionální rovnici. Označme $f(1) = a$, $f(2) = b$ a $f(5) = c$. Určeme prvních šestnáct hodnot $f(N)$ podle následující tabulky:

N	$k+m$	$f(N)$
1		a
2		b
3	$2+1$	$a+b$
4	$3+1$	$2a+b$
5		c
6	$4+2$	$2a+2b$
7	$5+2$	$b+c$
8	$6+2$	$2a+3b$
9	$6+3$	$3a+3b$
10	$7+3$	$a+2b+c$

N	$k+m$	$f(N)$
11	$8+3$	$3a+4b$
12	$8+4$	$4a+4b$
	$9+3$	$4a+4b$
13	$9+4$	$5a+4b$
14	$9+5$	$3a+3b+c$
	$10+4$	$3a+3b+c$
15	$10+5$	$a+2b+c$
	$11+4$	$5a+5b$
16	$11+5$	$3a+4b+c$
	$12+4$	$6a+5b$

Z hodnot $f(15)$ a $f(16)$ po řadě dostaneme $a + 2b + c = 5a + 5b$, $3a + 4b + c = 6a + 5b$. Odtud již dostaneme $b = 2a$, $c = 5a$. Matematickou indukcí snadno dále ukážeme, že $f(n) = an$. Zkouškou ověříme, že tato funkce vyhovuje dané rovnici pro libovolné reálné číslo a.