Matematický korespondenční seminář 1. (14.) ročník

3. série

Vážení přátelé, uvádíme třetí sérii MKS. Svá řešení odešlete do 22. ledna 2007 buď poštou na adresu:

RNDr. Pavel Calábek, Ph.D
Katedra algebry a geometrie PřF UP
Tomkova 40
779 00 Olomouc

na obálku napište MKS, nebo e-mailem na adresu calabek@aix.upol.cz, do předmětu napište MKS 3. kolo. Po tomto datu najdete na adrese http://isouteze.upol.cz/mks zadání příkladů 4. kola a výsledky a vzorová řešení 2. kola.

Limit pro získání prémie je $2(r + 2)$.

Úloha 1.

Dokažte, že pro libovolná kladná reálná čísla a, b platí

$$\frac{a+b}{1+a+b} \le \frac{a}{1+a} + \frac{b}{1+b}.$$

Úloha 2.

Ukažte, že pro všechna reálná čísla a, b ($a \ne 0$) platí

$$a^2 + b^2 + \frac{1}{a^2} + \frac{b}{a} \ge \sqrt{3}.$$

Úloha 3.

Jsou dána reálná čísla a, b, c tak že platí $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Dokažte, že potom platí

$$-\frac{1}{2} \le ab + bc + ca \le 1.$$

Úloha 4.

Dokažte, že pro libovolné reálné číslo a platí

$$2^{\sin a} + 2^{\cos a} \ge 2^{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}.$$

Úloha 5.

Najděte všechna kladná reálná čísla x tak, že platí

$$3x^2 + 4 \le 4\sqrt{2}\left(\sqrt{x}\right)^3.$$

Úloha 6.

Určete všechny funkce $f\colon \mathsf{N} \to \mathsf{R}$ takové, že pro všechna přirozená čísla k a m vyhovující podmínce $2m \le k \le 3m$ platí

$$f(k+m) = f(k) + f(m).$$