Matematický korespondenční seminář 1. (14.) ročník

Řešení 3. série

Úloha 1.

Je-li velikost každého vnitřního úhlu čtyřúhelníku $ABCD$ větší než $89°$, má každý z nich velikost menší než $93°$. Dokažte.

Řešení:

Předpokládejme, že existuje čtyřúhelník, jehož tři vnitřní úhly mají větší než $89°$ a čtvrtý velikost alespoň $93°$. Potom součet jejich velikostí je větší než

$$3 \cdot 89° + 93° = 360°,$$

což je ve sporu s trvzením, že součet velikostí vnitřních úhlů čtyřúhelníku je právě $360°$.

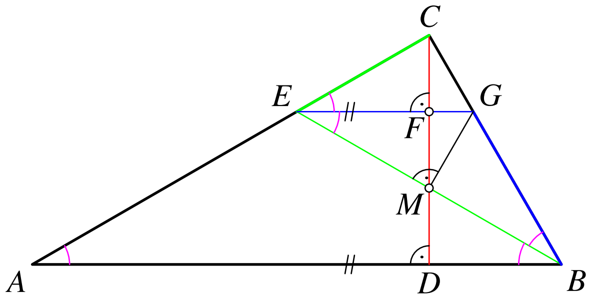
Úloha 2.

Určete velikosti vnitřních úhlů v trojúhelníku ABC, jehož výška CD a osa vnitřního úhlu BE se protínají v bodě M, pro který současně platí $|CM| = 2|MD|$ a $|BM| = |ME|$.

Řešení:

Jelikož bod M je střed úsečky EB, je zároveň vnitřní bod trojúhelníku ABC. Označme F střed úsečky CM a G průsečík přímky EF se stranou BC. Podle zadání jsou úhly CBE a EBA shodné. Protože platí

$$|MF| = |MD| \qquad \text{a} \qquad |MB| = |ME|,$$



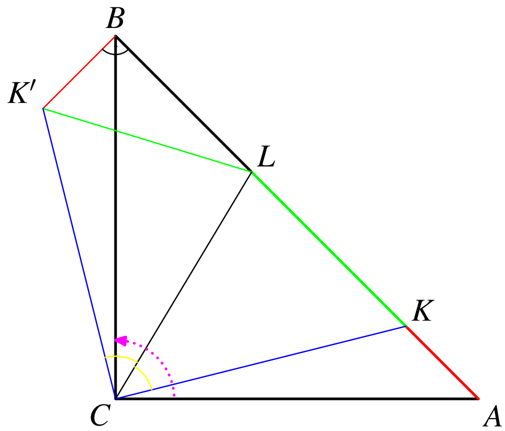
je čtyřúhelník $DBFE$ rovnoběžník, tedy přímka EF je kolmá na výšku CD, střídavé úhly FEB a EBA jsou shodné a souhlasné úhly CEF a CAB jsou shodné. Těžnice GM rovnoramenného trojúhelníku EGB je zároveň jeho výškou, úhel GME je proto pravý. Platí $|CF| = |MF|$, tedy trojúhelníky EFM a EFC jsou shodné podle věty (sus). Odtud již plyne rovnost $|ME| = |CE|$ a shodnost úhlů CEG, MEG. Podle věty (sus) jsou proto shodné i trojúhelníky GEG a MEG, tedy i úhel ACB je pravý. Snadno již dopočítáme

$$|\angle CBA| = 60° \qquad \text{a} \qquad |\angle CAB| = 30°.$$

Úloha 3.

Na přeponě AB pravoúhlého rovnoramenného trojúhelníku ABC jsou zvoleny dva body K, L (L leží mezi K a B) tak, že velikost úhlu KCL je $45°$. Dokažte, že z úseček AK, BL a KL lze sestavit pravoúhlý trojúhelník s přeponou KL.

Řešení:

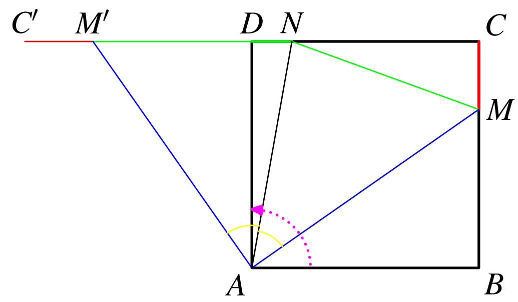


Uvažujme otočení O se středem C o orientovaný (pravý) úhel ACB. Obraz bodu K v tomto otočení označme K'. Obrazem bodu A v otočení O je bod B, obrazem úsečky AK je úsečka BK', tedy přímka AB je kolmá k úsečce BK' a platí $|BK'| = |AK|$. Velikost úhlu KCL je $45°$, úhel KCK' je pravý, velikost úhlu LCK' je proto také $45°$. Trojúhelníky KCL a $K'CL$ mají shodné stany KC a $K'C$ a společnou stanu CL, současně mají shodné vnitřní úhly při vrcholu C, jsou tedy shodné podle věty (sus). Proto též $|KL| = |K'L|$. Pravoúhlý trojúhelník $K'LB$ má přeponu $K'L$ o velikosti $|KL|$ a odvěsny o velikostech $|LB|$ a $|AK|$. Tedy z úseček AK, BL a KL lze sestavit pravoúhlý trojúhelník s přeponou KL.

Úloha 4.

Na stranách BC a CD čtverce $ABCD$ o straně délky 1 jsou zvoleny takové body M a N, že obvod trojúhelníku CMN je 2. Určete velikost úhlu MAN.

Řešení:



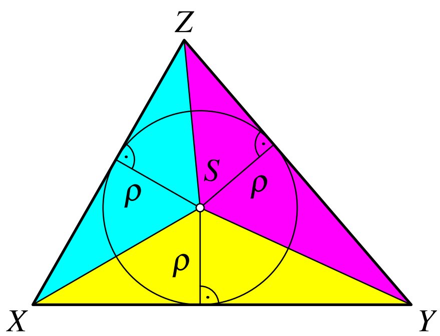
Uvažujme otočení O se středem A o orientovaný (pravý) úhel BAD. Obrazy bodů C, M v tomto otočení označme po řadě C', M'. Body C, D, M', C' leží na jedné přímce a platí $|CC'| = 2$, $|C'M'| = |CM|$. Jelikož obvod trojúhelníku CMN je též 2, platí $|M'N| = |MN|$. Navíc jsou úsečky AM a AM' shodné, tedy podle věty (sss) jsou trojúhelníky AMN a $AM'N$ shodné. Velikost úhlu MAM' je $90°$, ze shodnosti úhlů MAN a NAM' dostaneme, že velikost úhlu MAN je $45°$.

Úloha 5.

Nechť CD je výška z vrcholu C v pravoúhlém trojúhelníku ABC s přeponou AB. Kružnice vepsané trojúhelníkům ABC, ADC a BDC mají po řadě poloměry ρ, ρ_1 a ρ_2. Dokažte, že platí

$$|CD| = \rho + \rho_1 + \rho_2.$$

Řešení:



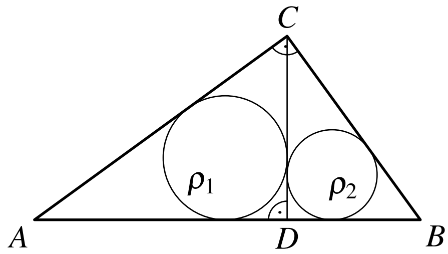
Nejprve odvodíme vztah mezi obvodem, obsahem a poloměrem kružnice vepsané trojúhelníku. Nechť $(S; \rho)$ je kružnice vepsaná libovolnému trojúhelníku XYZ a P_{XYZ} obsah trojúhelníku XYZ. Potom platí

$$P_{XYZ} = P_{XYS} + P_{YZS} + P_{ZXS} = \frac{1}{2}(\rho|XY| + \rho|YZ| + \rho|ZX|).$$

Odtud dostaneme

$$\rho(|XY| + |YZ| + |ZX|) = 2P_{XYZ}.$$

Nyní přistupme k vlastnímu řešení. Trojúhelníky ABC, ACD a CBD jsou podobné, proto



$$\frac{\rho_1}{\rho} = \frac{|AC|}{|AB|}, \qquad \frac{\rho_2}{\rho} = \frac{|BC|}{|BA|}.$$

Tedy

$$\rho + \rho_1 + \rho_2 = \rho + \rho\frac{|AC|}{|AB|} + \rho\frac{|BC|}{|BA|} = \frac{\rho(|AB| + |AC| + |BC|)}{|AB|} = \frac{2P_{ABC}}{|AB|} = |CD|.$$

Úloha 6.

Dvě kružnice se protínají v bodech P a Q. Přímka p protíná obě kružnice v bodech A, B, C, D (v tomto pořadí), přičemž body A a C, resp. B a D patří vždy téže kružnici. Dokažte, že platí

$$|\angle APB| = |\angle CQD|.$$

Řešení:

Označme R průsečík úseček PQ a AD. Podle věty o obvodovém úhlu jsou úhly PAC a PQC shodné. Ze stejného důvodu jsou shodné také úhly QDB a QPB. Vrcholové úhly PRA a QRD jsou též shodné. Součet velikostí vnitřních úhlů v trojúhelnících ARP a QRD je shodný, tedy musí být shodné i velikosti úhlů APB a CQD.