Matematický korespondenční seminář 1. (14.) ročník

4. série

Vážení přátelé, uvádíme třetí sérii MKS. Svá řešení odešlete do 30. března 2007 buď poštou na adresu:

RNDr. Pavel Calábek, Ph.D
Katedra algebry a geometrie PřF UP
Tomkova 40
779 00 Olomouc

na obálku napište MKS, nebo e-mailem na adresu calabek@aix.upol.cz, do předmětu napište MKS 4. kolo. Po tomto datu najdete na adrese http://isouteze.upol.cz/mks výsledky a vzorová řešení 3. kola.

Limit pro získání prémie je $2(r+2)$.

Úloha 1.

Je-li velikost každého vnitřního úhlu čtyřúhelníku $ABCD$ větší než 89°, má každý z nich velikost menší než 93°. Dokažte.

Úloha 2.

Určete velikosti vnitřních úhlů v trojúhelníku ABC, jehož výška CD a osa vnitřního úhlu BE se protínají v bodě M, pro který současně platí $|CM| = 2|MD|$ a $|BM| = |ME|$.

Úloha 3.

Na přeponě AB pravoúhlého rovnoramenného trojúhelníku ABC jsou zvoleny dva body K, L (L leží mezi K a B) tak, že velikost úhlu KCL je 45°. Dokažte, že z úseček AK, BL a KL lze sestavit pravoúhlý trojúhelník s přeponou KL.

Úloha 4.

Na stranách BC a CD čtverce $ABCD$ o straně délky 1 jsou zvoleny takové body M a N, že obvod trojúhelníku CMN je 2. Určete velikost úhlu MAN.

Úloha 5.

Nechť CD je výška z vrcholu C v pravoúhlém trojúhelníku ABC s přeponou AB. Kružnice vepsané trojúhelníkům ABC, ADC a BDC mají po řadě poloměry ρ, ρ_1 a ρ_2. Dokažte, že platí

$$|CD| = \rho + \rho_1 + \rho_2.$$

Úloha 6.

Dvě kružnice se protínají v bodech P a Q. Přímka p protíná obě kružnice v bodech A, B, C, D (v tomto pořadí), přičemž body A a C, resp. B a D patří vždy téže kružnici. Dokažte, že platí

$$|\angle APB| = |\angle CQD|.$$