Labyrint matematiky (MKS) 2. (15.) ročník

Řešení 1. série

Úloha 1.

Kvádr o rozměrech $5 \times 4 \times 3$ je složen z 60 jednotkových krychlí. Kolik z nich protíná jedna z jeho tělesových úhlopříček?

Řešení:

Uvažujme jednu tělesovou úhlopříčku. Čísla 3, 4, 5 jsou po dvou nesoudělná, proto vnitřek tělesové úhlopříčky (tělesová úhlopříčka bez krajních bodů) neprotíná žádnou hranu jednotkové krychle.

Roviny rovnoběžné se stěnou o rozměrech 5×4, které procházejí vrcholy jednotlivých krychlí protínají vnitřek tělesové úhlopříčky ve dvou bodech, roviny rovnoběžné se stěnou 5×3 ve třech bodech a roviny rovnoběžné se stěnou 4×3 ve čtyřech bodech. Protože žádné takové dva body nejsou shodné (jinak by vnitřek tělesové úhlopříčky procházel hranou některé z jednotkových krychlí), dělí těchto 9 bodů tělesovou úhlopříčku na 10 úseků, každý z nich leží uvnitř právě jedné jednotkové krychle. Tedy tělesová úhlopříčka protíná 10 jednotkových krychlí.

Úloha 2.

Dokažte, že pro všechna přirozená čísla $n \geq 3$ platí $n^{n+1} > (n+1)^n$.

Řešení:

Důkaz provedeme matematickou indukcí.

Platí $3^{(3+1)} = 3^4 = 81 > 64 = 4^3 = (3+1)^3$, tedy dané tvrzení platí pro $n = 3$.

Předpokládejme, že dané tvrzení platí pro nějaké přirozené číslo $n \geq 3$, tedy pro toto přirozené číslo n platí

$$n^{n+1} > (n+1)^n.$$

Ukážeme-li, že platí

$$\frac{(n+1)^{n+2}}{n^{n+1}} \geq \frac{(n+2)^{n+1}}{(n+1)^n} \tag{2.1}$$

potom vynásobením těchto dvou nerovností dostaneme, že dokazované tvrzení platí i pro $n+1$. Tedy podle principu matematické indukce bude tvrzení platit pro všechna přirozená čísla $n \geq 3$.

Nyní přistupme k důkazu nerovnosti (2.1). Tato nerovnost je ekvivalentní s nerovností

$$(n+1)^{2n+2} \geq (n(n+2))^{n+1}.$$

Levou strana této nerovnosti upravíme na tvar

$$(n+1)^{2n+2} = \left((n+1)^2\right)^{n+1} = \left(n^2+2n+1\right)^{n+1},$$

pravou stranu na tvar

$$(n(n+2))^{n+1} = \left(n^2+2n\right)^{n+1}.$$

Tedy dokazovaná nerovnost je ekvivalentní s nerovností

$$\left(n^2 + 2n + 1\right)^{n+1} \geq \left(n^2 + 2n)\right)^{n+1},$$

která zřejmě platí, jelikož pro všechna přirozená čísla n platí

$$n^2 + 2n + 1 \geq n^2 + 2n.$$

Úloha 3.

Na rovnoramenných vahách vážíme následujícím způsobem: Na levou misku položíme vážený předmět a potom pokládáme závaží na levou či pravou stranu tak dlouho, dokud nejsou misky v rovnováze. Určete nejmenší počet závaží, se kterými můžeme zvážit každý předmět vážící n gramů, kde n je libovolné přirozené číslo z intervalu $\langle 1, 1000 \rangle$.

Například: Se závažími 1 g, 2 g a 5 g jsme schopni určit hmotnost $n = 3$ gramy (levá miska n; 2, pravá 5) či $n = 8$ (levá miska n, pravá miska 5; 2; 1).

Řešení:

Nechť máme sadu k závaží. Každé z nich můžeme umístit na pravou misku vah, nebo na levou misku, nebo ho nemusíme použít. Pokud nepoužijeme žádné ze závaží, nezvážíme na vahách žádnou nenulovou hmotnost. Každému jinému rozmístění závaží na jednotlivé misky odpovídá rozmístění, kde každé umístěné závaží je na jiné misce. Z těchto dvou rozmístění nejvýše jedno umožní zvážit předmět na levé misce (při opačném rozmístění by už levá miska nebyla lehčí než pravá). Proto sadou k závaží můžeme zvážit nejvýše $\frac{1}{2}\left(3^k - 1\right)$ různých hmotností. Abychom tedy zvážili všech 1000 různých hmotností, musí platit

$$\frac{1}{2}\left(3^k - 1\right) \geq 1000, \quad \text{tedy} \quad k \geq \log_3 2001 \approx 6{,}92.$$

Číslo k je přirozené, tedy $k \geq 7$.

Ukážeme, že sadou sedmi závaží o hmotnostech (v gramech)

$$1, 3, 3^2 = 9, 3^3 = 27, 3^4 = 81, 3^5 = 243, 3^6 = 729$$

umíme zvážit každou hmotnost od 1 do 1000. Obecněji, matematickou indukcí ukážeme, že sadou závaží $\{1, 3, 3^2, \ldots, 3^{k-1}\}$ jsme schopni vyvážit každý předmět s celočíselnou hmotností od 0 do $\frac{1}{2}\left(3^k - 1\right)$.

Pro $k = 1$ tvrzení jistě platí (závažím o hmotnosti 1 jsme schopni zvážit předměty o hmotnostech 0 a 1.

Nechť výše uvedenou sadou závaží jsme schopni zvážit jakýkoli předmět o hmotnosti do $\frac{1}{2}\left(3^k - 1\right)$. Uvažujme, že máme ještě závaží o hmotnosti 3^k, každé celé číslo z intervalu $\left\langle 0, \frac{1}{2}\left(3^{k+1} - 1\right)\right\rangle$ patří do některého z intervalů $\left\langle 0, \frac{1}{2}\left(3^k - 1\right)\right\rangle$, nebo $\left\langle \frac{1}{2}\left(3^k + 1\right), 3^k - 1\right\rangle$, nebo $\left\langle 3^k, \frac{1}{2}\left(3^{k+1} - 1\right)\right\rangle$. Uvážím tyto tři možnosti:

A) Hmotnost z intervalu $\left\langle 0, \frac{1}{2}\left(3^k - 1\right)\right\rangle$ umíme zvážit pomocí sady závaží $\{1, 3, \ldots, 3^{k-1}\}$, tedy i pomocí sady závaží $\{1, 3, \ldots, 3^{k-1}, 3^k\}$ (závaží o hmotnosti 3^k vůbec nepoužijeme).

B) Pokud máme zvážit předmět o hmotnosti z intervalu $\left\langle \frac{1}{2}\left(3^k + 1\right), 3^k - 1\right\rangle$, položíme závaží o hmotnosti 3^k na pravou misku, na levou misku musíme položit závaží o hmotnosti z intervalu $\left\langle 3^k - (3^k - 1), 3^k - \frac{1}{2}\left(3^k + 1\right)\right\rangle = \left\langle 1, \frac{1}{2}\left(3^k - 1\right)\right\rangle$, což podle indukčního předpokladu umíme pomocí sady $\{1, 3, \ldots, 3^{k-1}\}$.

C) Pokud máme zvážit předmět o hmotnosti z intervalu $\left\langle 3^k, \frac{1}{2}\left(3^{k+1}-1\right)\right\rangle$, položíme závaží o hmotnosti 3^k na pravou misku, pak tam ještě musíme položit závaží o hmotnosti z intervalu $\left\langle 3^k - 3^k, \frac{1}{2}\left(3^{k+1}-1\right) - 3^k\right\rangle = \left\langle 0, \frac{1}{2}\left(3^k - 1\right)\right\rangle$, což podle indukčního předpokladu umíme pomocí sady $\{1, 3, \ldots, 3^{k-1}\}$.

Tedy umíme zvážit libovolný předmět s hmotností z intervalu $\left\langle 1, 12\left(3^{k+1}-1\right)\right\rangle$ pomocí sady závaží $\{1, 3, \ldots, 3^{k-1}, 3^k\}$.

Podle principu matematické indukce tedy pomocí vhodné sady sedmi závaží umíme zvážit každý předmět o hmotnosti $\langle 1, 1000\rangle$.

Úloha 4.

Nechť pro reálná čísla a, b, c platí $\frac{b+c}{a} < -1$, potom kvadratická rovnice $ax^2 + bx + c = 0$ má dva reálné kořeny. Dokažte.

Rozhodněte, zda platí obrácené tvrzení: Jestliže má kvadratická rovnice $ax^2 + bx + c = 0$ dva reálné kořeny, potom pro její koeficienty platí $\frac{b+c}{a} < -1$.

Řešení:

Kvadratická rovnice má dva reálné kořeny, právě když je její diskriminant kladný. Podle zadání se jedná o kvadratickou rovnici, tedy $a \neq 0$. Obě strany nerovnosti $\frac{b+c}{a} < -1$ vynásobíme kladným číslem a^2 a dostaneme nerovnost $ab + ac < -a^2$. Odtud $-ac > a^2 + ab$ a platí

$$D = b^2 - 4ac > b^2 + 4(a^2 + ab) = (2a + b)^2 \geq 0.$$

Diskriminant kvadratické rovnice je kladný, proto má dva různé reálné kořeny.

Na druhou stranu, kvadratická rovnice $x^2 + 3x + 2 = 0$ má dva různé reálné kořeny -1 a -2, přitom hodnota $\frac{b+c}{a} = 5 > 0$, tedy obrácené tvrzení neplatí.

Úloha 5.

Najděte přirozené číslo n takové, že platí

$$\frac{n}{50} < \frac{1}{2 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 8} + \frac{1}{8 \cdot 11} + \ldots + \frac{1}{200 \cdot 203} < \frac{n+1}{50}.$$

Řešení:

Pro libovolné přirozené číslo k platí

$$\frac{1}{k(k+3)} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+3}\right).$$

Proto

$$\frac{1}{2 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 8} + \frac{1}{8 \cdot 11} + \ldots + \frac{1}{200 \cdot 203} =$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{8}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{8} - \frac{1}{11}\right) + \ldots + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{200} - \frac{1}{203}\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{203}\right) = \frac{67}{406}.$$

Pro hledané přirozené číslo n má platit

$$\frac{n}{50} < \frac{67}{406} < \frac{n+1}{50}.$$

Z levé nerovnosti dostaneme

$$n < \frac{50 \cdot 67}{406} \approx 8{,}25,$$

z pravé

$$n > \frac{50 \cdot 67}{406} - 1 \approx 7{,}25.$$

Jediné přirozené číslo n které vyhovuje oběma nerovnostem je číslo $n = 8$.

Úloha 6.

Jestliže velikosti stran trojúhelníka jsou vyjádřeny přirozenými čísly, potom kosiny jeho vnitřních úhlů jsou racionální čísla. Dokažte.

Rozhodněte, zda platí: Jestliže $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ jsou racionální čísla, kde $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\gamma > 0$ a $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$, potom existuje trojúhelník s vnitřními úhly α, β, γ, jehož velikosti stran jsou vyjádřeny přirozenými čísly.

Řešení:

Uvažujme trojúhelník s obvyklým značením velikostí stran a úhlů.

Předpokládejme, že velikosti jeho stran jsou vyjádřeny přirozenými čísly. Podle kosinové věty pro stranu a platí

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha.$$

Odtud

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}.$$

Jelikož a, b, c jsou přirozená čísla, je $b^2 + c^2 - a^2$ celé číslo a $2bc$ přirozené číslo, tedy $\cos\alpha$ je racionální číslo, podobně pro zbývající úhly. Tím je vyřešena první část úlohy.

Nyní předpokládejme, že kosiny vnitřních úhlů jsou racionální čísla. Podle součtových vzorců pro goniometrické funkce platí

$$-\cos\gamma = \cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\,\cos\beta - \sin\alpha\,\sin\beta$$

a odtud

$$\sin\alpha\,\sin\beta = \cos\alpha\cos\beta + \cos\gamma.$$

Podle sinové věty dále platí

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{\sin\alpha\,\sin\beta}{\sin^2\beta} = \frac{\cos\alpha\cos\beta + \cos\gamma}{1 - \cos^2\beta},$$

což je racionální číslo, označme ho $\frac{p}{q}$, kde p a q jsou přirozená čísla. Podobně ukážeme, že $\frac{b}{c} = \frac{r}{s}$, kde r a s jsou přirozená čísla. Odtud $\frac{c}{a} = \frac{sq}{pr}$. Přirozená čísla $a = pr$, $b = qr$ a $c = sq$ vyhovují těmto vztahům a tedy udávají velikosti stran trojúhelníku s vnitřními úhly α, β, γ.