Labyrint matematiky (MKS) 2. (15.) ročník

1. série

Vážení přátelé, dostáváte do rukou první sérii prvního ročníku matematického korespondenčního semináře, který navázuje na tradici korespondenčních seminářů pořádaných Přírodovědeckou fakultou Univerzity Palackého v Olomouci. Více informací o této soutěži získáte z úvodního dopisu.

Svá řešení odešlete do 30. listopadu 2007 buď poštou na adresu:

RNDr. Pavel Calábek, Ph.D
Katedra algebry a geometrie PřF UP
Tomkova 40
779 00 Olomouc

na obálku napište MKS, nebo e-mailem na adresu calabek@aix.upol.cz, do předmětu napište MKS 1. kolo. Po tomto datu najdete na adrese http://isouteze.upol.cz/mks zadání příkladů 2. kola, výsledky a vzorová řešení 1. kola najdete na této stránce také, nejpozději do data zveřejnění 3. kola.

Limit pro získání prémie je $3(r+2)$.

Úloha 1.

Kvádr o rozměrech $5\times4\times3$ je složen z 60 jednotkových krychlí. Kolik z nich protíná jedna z jeho tělesových úhlopříček?

Úloha 2.

Dokažte, že pro všechna přirozená čísla $n \geq 3$ platí $n^{n+1} > (n+1)^n$.

Úloha 3.

Na rovnoramenných vahách vážíme následujícím způsobem: Na levou misku položíme vážený předmět a potom pokládáme závaží na levou či pravou stranu tak dlouho, dokud nejsou misky v rovnováze. Určete nejmenší počet závaží, se kterými můžeme zvážit každý předmět vážící n gramů, kde n je libovolné přirozené číslo z intervalu $\langle 1, 1000\rangle$.

Například: Se závažími 1 g, 2 g a 5 g jsme schopni určit hmotnost $n = 3$ gramy (levá miska n; 2, pravá 5) či $n = 8$ (levá miska n, pravá miska 5; 2; 1).

Úloha 4.

Nechť pro reálná čísla a, b, c platí $\frac{b+c}{a} < -1$, potom kvadratická rovnice $ax^2+bx+c = 0$ má dva reálné kořeny. Dokažte.

Rozhodněte, zda platí obrácené tvrzení: Jestliže má kvadratická rovnice $ax^2+bx+c = 0$ dva reálné kořeny, potom pro její koeficienty platí $\frac{b+c}{a} < -1$.

Úloha 5.

Najděte přirozené číslo n takové, že platí

$$\frac{n}{50} < \frac{1}{2\cdot5} + \frac{1}{5\cdot8} + \frac{1}{8\cdot11} + \ldots + \frac{1}{200\cdot203} < \frac{n+1}{50}.$$

Úloha 6.

Jestliže velikosti stran trojúhelníka jsou vyjádřeny přirozenými čísly, potom kosiny jeho vnitřních úhlů jsou racionální čísla. Dokažte.

Rozhodněte, zda platí: Jestliže $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ jsou racionální čísla, kde $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\gamma > 0$ a $\alpha + \beta + \gamma = 180°$, potom existuje trojúhelník s vnitřními úhly α, β, γ, jehož velikosti stran jsou vyjádřeny přirozenými čísly.