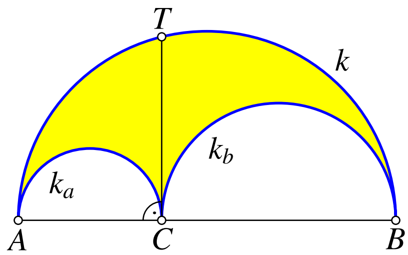
Labyrint matematiky (MKS) 2. (15.) ročník

Řešení 2. série

Úloha 1.

Nechť C je vnitřní bod úsečky AB. V jedné z polorovin vyťatých přímkou AB uvažujme polokružnice k, k_a a k_b po řadě sestrojené nad průměry AB, AC, BC. Útvar, který je jimi omezen, se nazývá *arbelos*. Označme dále T průsečík kolmice k přímce AB sestrojené v bodě C s polokružnicí k. Dokažte, že obsah arbelu je roven obsahu kružnice s průměrem CT.

Řešení:



Podle Thaletovy věty je trojúhelník ABT pravoúhlý, podle Euklidovy věty o výšce platí $|CT|^2 = |AC| \cdot |CB|$. Obsahy polokruhů ohraničených polokružnicemi k, k_a, k_b jsou po řadě $\frac{1}{8}\pi\ (|AC| + |CB|)^2$, $\frac{1}{8}\pi|AC|^2$, $\frac{1}{8}\pi|CB|^2$. Obsah arbelu je tedy roven

$$\frac{1}{8}\pi\ \left((|AC| + |CB|)^2 - |AC|^2 - |CB|^2\right) = \frac{1}{4}\pi|AC| \cdot |CB| = \\ = \frac{1}{4}\pi|CT|^2,$$

což je obsah kruhu s průměrem $|CT|$.

Úloha 2.

Určete, jakých hodnot může nabývat reálný parametr a, aby rovnice s neznámou x

$$a \cdot 3^x + 3^{-x} = 3$$

měla právě jedno řešení.

Řešení:

Označme $z = 3^{-x}$. Pro reálné číslo x je číslo z kladné, na druhou stranu ke každému kladnému číslu z existuje právě jedno reálné číslo x tak, že platí $z = 3^{-x}$.

Vynásobením dané rovnice číslem 3^{-x} dostaneme po úpravě kvadratickou rovnici

$$z^2 - 3z + a = 0. \tag{2.1}$$

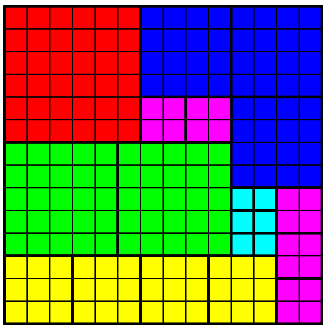
Tato rovnice bude mít reálné kořeny, pravě když její diskriminant $9 - 4a^2$ bude nezáporný, tedy $a \in \langle -\frac{3}{2}; -\frac{3}{2} \rangle$. Podle vztahů mezi kořeny a koeficienty kvadratické rovnice bude rovnice (2.1) mít jeden kladný a jeden záporný kořen, právě když $a < 0$. Jeden z kořenů bude nulový, právě když $a = 0$, ale pro $a = 0$ má kvadratická rovnice (2.1) kořeny 0 a 3, tedy druhý kořen je kladný. Tedy rovnice (2.1) bude mít právě jeden kladný kořen, právě když $a \in\in \langle -\frac{3}{2}; 0 \rangle$ a k tomuto kladnému kořenu bude existovat právě jedno reálné číslo x, které je řešením zadané rovnice.

Úloha 3.

Dokažte, že čtverec o straně délky 14 lze rozřezat na 21 menších čtverců, a to 6 čtverců o straně 1, 5 čtverců o straně 2, 4 čtverce o straně 3, 3 čtverce o straně 4, 2 čtverce o straně 5 a 1 čtverec o straně 6.

Řešení:

Jedno z možných rozřezání je na obrázku, tedy tento čtverec rozřezat lze.



Úloha 4.

Určete všechny dvojice (a, b) celých čísel, pro něž jsou obě čísla

$$\frac{a+1}{b} \quad \text{a} \quad \frac{b+1}{a}$$

rovněž celá.

Řešení:

Čísla a, b jsou nutně nenulová. Z předpokladu $|a| = |b|$ plyne, že číslo $\frac{a}{b}$ je celé, tedy je celé i číslo $\frac{a+1}{b} - \frac{a}{b} = \frac{1}{b}$, proto $|b| = 1$ a zkouškou ověříme, že každá dvojice (a, b) z množiny $\{(-1; -1), (-1; 1), (1, -1), (1; 1)\}$ vyhovuje zadání úlohy.

Bez újmy na obecnosti nyní předpokládejme, že $|a| > |b| > 0$, tedy $\left|\frac{b}{a}\right| < 1$. Jelikož číslo $\frac{b+1}{a}$ je celé, je celá i jeho absolutní hodnota a platí

$$\left|\frac{b+1}{a}\right| \leq \left|\frac{b}{a}\right| + \left|\frac{1}{a}\right| < 2.$$

Tedy číslo $\frac{b+1}{a}$ je z množiny $\{-1, 0, 1\}$. Rozebereme tři případy:

a) $\frac{b+1}{a} = -1$, tedy $a = -b - 1$ a platí $\frac{a+1}{b} = \frac{-b-1+1}{b} = -1$, což je také celé číslo. Podmínce $|a| > |b| > 0$ vyhovují čísla $a = -b - 1$ pro b přirozená. Tedy každá z dvojic $(-b - 1, b)$ vyhovuje pro přirozená čísla b zadání úlohy.

b) $\frac{b+1}{a} = 0$, tedy $b = -1$ a platí $\frac{a+1}{b} = \frac{a+1}{-1} = -a - 1$, což je také celé číslo. Podmínce $|a| > |b| > 0$ vyhovují čísla taková celá čísla a, pro která platí $|a| > 1$. Tedy každá z dvojic $(a, -1)$ vyhovuje pro celá čísla a taková, že $|a| > 1$, zadání úlohy.

c) $\frac{b+1}{a} = 1$, tedy $a = b + 1$ a platí $\frac{a+1}{b} = \frac{b+2}{b} = 1 + \frac{2}{b}$, což je celé číslo pro $b \in \{-2, -1, 1, 2\}$. Podmínce $|a| > |b| > 0$ vyhovují pouze $b \in \{1, 2\}$ Tedy každá z dvojic $(2, 1)$ a $(3, 2)$ vyhovuje zadání úlohy.

Každá z předcházejících dvojic a v případech a), b) c) i dvojice opačné vyhovují zadání úlohy.

Úloha 5.

Je dáno celé nezáporné číslo n a přirozené číslo k. Určete počet všech řešení rovnice

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_k = n$$

v oboru celých nezáporných čísel.

Řešení:

Nechť $x_1, x_2, \ldots, x_k$ značí počty kuliček v zásuvkách $1, 2, \ldots, k$. Každému řešení odpovídá jedno rozmístění kuliček, na druhou stranu ovšem každému rozmístění kuliček do očíslovaných zásuvek odpovídá jedno řešení, proto je počet všech řešení roven počtu všech různých rozmístění n kuliček do k zásuvek. Jedná se tedy o nčlenné kombinace s opakováním z k prvků. Počet všech řešení dané rovnice v oboru nezáporných čísel je proto $\binom{n+k-1}{n}$.

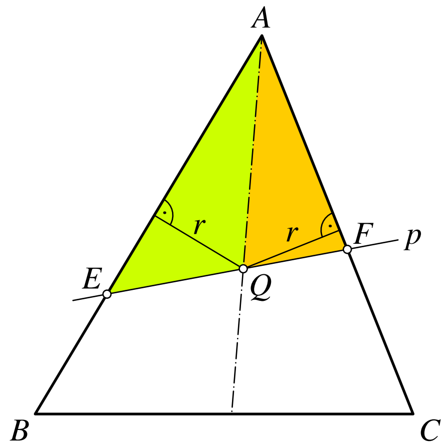
Úloha 6.

Uvažujme trojúhelník ABC, jehož strany mají (při obvyklém označení) délky a, b, c. Uvažujme je vnitřní bod P tohoto trojúhelníku s vlastností: Každá přímka, na níž leží bod P a která současně protíná strany AB a AC po řadě (v různých) bodech E a F tak, že platí

$$\frac{1}{|AE|} + \frac{1}{|AF|} = \frac{a+b+c}{b \cdot c}\,.$$

Dokažte, že P je středem kružnice vepsané trojúhelníku ABC.

Řešení:



Nejprve předpokládejme, že pro přímku p protínající stran AB a AC ve vnitřních bodech E a F platí, že součet $\frac{1}{|AE|} + \frac{1}{|AF|}$ nabývá konstantní hodnoty (nezávislé od polohy přímky p). Uvažujme bod Q, který je průsečíkem osy úhlu BAC s přímkou p. Označme r vzdálenost bodu Q od (obou) ramen úhlu BAC. Obsah trojúhelníku AEF je součtem obsahů trojúhelníků AEQ a AQF, tedy jeho obsah je z jedné strany roven $\frac{1}{2}|AE| \cdot r + \frac{1}{2}|AF| \cdot r$. Obsah trojúhelníku AEF se ovšem také rovná $\frac{1}{2}|AE| \cdot |AF| \sin\alpha$, kde α je velikost vnitřního úhlu při vrcholu A. Obě strany rovnosti

$$\frac{1}{2}|AE| \cdot r + \frac{1}{2}|AF| \cdot r = \frac{1}{2}|AE| \cdot |AF| \sin\alpha$$

vydělíme $\frac{1}{2}r \cdot |AE| \cdot |AF|$ a dostaneme

$$\frac{1}{|AE|} + \frac{1}{|AF|} = \frac{\sin\alpha}{r}. \tag{6.1}$$

Protože podle předpokladu je hodnota vlevo nezávislá na poloze přímky p, musí být hodnota r (tedy i poloha bodu Q) nezávislá na poloze přímky p. Tedy každá přímka, která prochází vnitřními body E a F stran AB a AC trojúhelníku ABC tak, že součet

$$\frac{1}{|AE|} + \frac{1}{|AF|}$$

nabývá předem danou hodnotu, prochází také pevným bodem Q osy vnitřního úhlu při vrcholu A. Naopak, každá přímka, která prochází pevně daným bodem Q a protíná strany AB a AC má součet $\frac{1}{|AE|} + \frac{1}{|AF|}$ závislý jen na poloze bodu Q.

Zlomek $\frac{a+b+c}{b \cdot c}$ rozšiřme číslem $\frac{1}{2}\rho \sin \alpha$, kde ρ je poloměr kružnice vepsané trojúhelníku ABC (a α velikost vnitřního úhlu při vrcholu A). Označme S obsah trojúhelníku ABC. Platí

$$\frac{a+b+c}{b \cdot c} = \frac{\left(\frac{1}{2}(a+b+c)\rho\right) \sin \alpha}{\left(\frac{1}{2}\, b \cdot c \sin \alpha\right) \rho} = \frac{S \sin \alpha}{S\rho} = \frac{\sin \alpha}{\rho}.$$

Z rovnosti ze zadání a z rovnosti (6.1) plyne $r = \rho$, tedy každá přímka, která vyhovuje podmínkám úlohy prochází bodem Q osy úhlu BAC, který je vzdálen ρ od stran AB a AC trojúhelníku ABC, tedy středem kružnice opsané trojúhelníku ABC. Žádný jiný bod tyto vlastnost nemá, proto P je středem kružnice opsané trojúhelníku ABC