Labyrint matematiky (MKS) 2. (15.) ročník

2. série

Vážení přátelé, dostáváte do rukou druhou sérii prvního ročníku matematického korespondenčního semináře, který navazuje na tradici korespondenčních seminářů pořádaných Přírodovědeckou fakultou Univerzity Palackého v Olomouci. Více informací o této soutěži získáte z úvodního dopisu.

Svá řešení odešlete do 15. března 2008 buď poštou na adresu:

RNDr. Pavel Calábek, Ph.D
Katedra algebry a geometrie PřF UP
Tomkova 40
779 00 Olomouc

na obálku napište MKS, nebo e-mailem na adresu calabek@aix.upol.cz, do předmětu napište MKS 2. kolo. Po tomto datu najdete na adrese http://isouteze.upol.cz/mks výsledky a vzorová řešení 2. kola.

Limit pro získání prémie je $3(r + 2)$.

Úloha 1.

Nechť C je vnitřní bod úsečky AB. V jedné z polorovin vyťatých přímkou AB uvažujme polokružnice k, k_a a k_b po řadě sestrojené nad průměry AB, AC, BC. Útvar, který je jimi omezen, se nazývá *arbelos*. Označme dále T průsečík kolmice k přímce AB sestrojené v bodě C s polokružnicí k. Dokažte, že obsah arbelu je roven obsahu kružnice s průměrem CT.

Úloha 2.

Určete, jakých hodnot může nabývat reálný parametr a, aby rovnice s neznámou x

$$a \cdot 3^x + 3^{-x} = 3$$

měla právě jedno řešení.

Úloha 3.

Dokažte, že čtverec o straně délky 14 lze rozřezat na 21 menších čtverců, a to 6 čtverců o straně 1, 5 čtverců o straně 2, 4 čtverce o straně 3, 3 čtverce o straně 4, 2 čtverce o straně 5 a 1 čtverec o straně 6.

Úloha 4.

Určete všechny dvojice (a, b) celých čísel, pro něž jsou obě čísla

$$\frac{a+1}{b} \quad \text{a} \quad \frac{b+1}{a}$$

rovněž celá.

Úloha 5.

Je dáno celé nezáporné číslo n a přirozené číslo k. Určete počet všech řešení rovnice

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_k = n$$

v oboru celých nezáporných čísel.

Úloha 6.

Uvažujme trojúhelník ABC, jehož strany mají (při obvyklém označení) délky a, b, c. Uvažujme je vnitřní bod P tohoto trojúhelníku s vlastností: Každá přímka, na níž leží bod P a která současně protíná strany AB a AC po řadě (v různých) bodech E a F tak, že platí

$$\frac{1}{|AE|} + \frac{1}{|AF|} = \frac{a+b+c}{b \cdot c}\,.$$

Dokažte, že P je středem kružnice vepsané trojúhelníku ABC.